Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“

Blatt 2

Abgabetermin: 03.11.2005

Aufgabe 5 Das Volumen $\alpha(n)$ der Einheitskugel $B(0,1)$ im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $\alpha(n) = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$, $n\alpha(n)$ ist die Oberfläche der Einheitssphäre $\partial B(0,1)$. Berechnen Sie das Volumen der Kugel $B(x,r)$ und die Oberfläche der Sphäre $\partial B(x,r)$ im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 6 Zeigen Sie, dass die Laplacegleichung $\Delta u = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ rotationsinvariant ist. Das bedeutet, dass die Funktion $v(x) = u(Ox)$ mit O als orthogonaler $n \times n$–Matrix (d.h. $O^T = O^{-1}$) ebenfalls die Laplacegleichung $\Delta v = 0$ erfüllt.

Aufgabe 7 Betrachten Sie für $u = u(x,y)$ ($n = 2$) das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ u_y(x,0) &= \frac{1}{k}\cos kx \end{aligned}$$

Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Ist das Problem sachgemäss gestellt? Was ändert sich, wenn man die Differentialgleichung durch $u_{xx} - u_{yy} = 0$ ersetzt (und alles andere unverändert läßt)?

Aufgabe 8 Betrachten Sie für $u = u(x,y)$ ($n = 2$) das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ u &= u_1 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 1 \\ u &= u_2 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

wobei u_1 und u_2 zwei gegebene Konstanten sind.
Zeigen Sie zunächst, dass die Differentialgleichung in Polarkoordinaten

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$$

für $u(x,y) = v(r,\phi)$ von der Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}$$

ist. Suchen Sie dann eine Lösung der Gleichung in Polarkoordinaten, welche die gegebenen Randdaten erfüllt. Ist die Lösung eindeutig?