Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“

Blatt 10

Abgabetermin: 23.01.2006

Aufgabe 37 Berechnen Sie ausgehend von den isentropen Euler-Gleichungen (Aufgabe 4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\, u) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + div(\rho\, u_i u) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, p(\rho) = C\rho^\gamma,$$

($i = 1, 2, 3$), die akustischen Grundgleichungen durch Linearisierung um den Punkt $\zeta = (\rho, u, \partial_t \rho, \nabla \rho, div\ u) = (\rho_0, 0, 0, 0, 0)$. Ersetzen Sie in den entstehenden Gleichungen die Dichte durch den skalierten linearen Druck $p = (p(\rho_0) + p'(\rho_0)\rho) \,/\, (p'(\rho_0)\rho_0)$.

Aufgabe 38 Überprüfen Sie, ob die in Aufgabe 37 hergeleiteten akustischen Grundgleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial t} + div(u) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t} + p'(\rho_0)\nabla p = 0$$

ein hyperbolisches System bilden. Führen Sie zu diesem Zweck die Schallgeschwindigkeit c ein, für die (siehe Aufgabe 4) $c^2 = p'(\rho_0)$ gilt. Multiplizieren Sie dann das System mit der Matrix $B^{(0)}$,

$$B^{(0)} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die Matrix $B^{(0)}$ ist symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass die akustischen Grundgleichungen hyperbolisch sind (sie sind sogar *symmetrisch* hyperbolisch).

Aufgabe 39 Eine wichtige Gleichung in der transonischen Aerodynamik ist die sogenannte Tricomi–Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Schreiben Sie die Gleichung als ein System erster Ordnung und zeigen Sie, dass die Gleichung nur für $x < 0$ hyperbolisch ist. Berechnen Sie die charakteristischen Kurven und die zugehörigen Invarianten.

Aufgabe 40 Betrachten Sie das System $U_t = M(U)U_x$ mit $U(x,t) = (u(x,t), c(x,t))^t$, der Matrix $M(U)$,

$$M(U) = -\begin{pmatrix} u + c & 1 \\ 0 & u \end{pmatrix},$$

und den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = u_0(x)$, $c(x, 0) = c_0(x)$.

Berechnen Sie die charakteristischen Kurven und die Riemann Invarianten. Ist es möglich, eine Lösung in Form einfacher Wellen (Simple Waves) zu bestimmen?