Prof. Dr. J. Struckmeier WS 2005/06

Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“
Blatt 1
Abgabetermin: 31.10.2005

Aufgabe 1 Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$au_x + bu_y = g(x, y), \quad a, b \in \mathbb{R},\ ab \neq 0$$

Transformieren Sie die Differentialgleichung durch

$$v = bx + ay, \quad w = bx - ay$$

in eine gewöhnliche Differentialgleichung und lösen Sie damit das Anfangswertproblem

$$u_t + 3u_x = 36t + 12x, \quad u(x, 0) = 0$$

Aufgabe 2 In der geometrischen Optik verwendet man die Eikonalgleichung

$$|Du| := \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2} = 1$$

Klassifizieren Sie die Differentialgleichung nach der Definition 1.2 aus der Vorlesung und bestimmen Sie in Anlehnung an die geometrische Optik eine Lösung der Gleichung.

Aufgabe 3 Die Telegraphengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$$

beschreibt den zeitlichen Verlauf der Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.
Gesucht ist die Signalspannung, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0, t) = 3 \sin 2t$, $t \geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ nicht zu einer Lösung führt.

b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x, t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 Die eindimensionalen, isentropen Euler–Gleichungen lassen sich auch in der Form

$$U_t + A(U)U_x = 0$$

schreiben, wobei $U = (\rho, u)^T$ in primitiven bzw. $U = (\rho, \rho u)^T$ in konservativen Variablen und A eine 2×2–Matrix ist. Berechnen Sie unter Annahme eines idealen Gases $p(\rho) = A\rho^\gamma$ die Eigenwerte und Eigenwerte der Matrix A in Abhängigkeit von dem Vektor U.