

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine (nichtlineare) partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Differentialgleichung der Form

$$(3.1) \quad F(y, u, \nabla u) = 0$$

wobei $y \in U$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dabei ist $F : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G = \bar{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, eine gegebene Funktion und wir suchen eine Lösung $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(y)$. Typischerweise haben wir $y_n = t$, die Zeitkoordinate, und $x = (y_1, \dots, y_{n-1})$, die Ortskoordinate.

1. Die Methode der Charakteristiken

Die Gleichung (3.1) läßt sich auf folgende Weise geometrisch interpretieren: eine Lösung $u = u(y)$ der Gleichung definiert eine Oberfläche $w = u(y)$ im \mathbb{R}^{n+1} so, dass die Tangentialebene an jedem Punkt (y_0, w_0) der Oberfläche durch die Gleichung

$$w = w_0 + \nabla u(y_0) \cdot (y - y_0)$$

gegeben ist. Wir definieren daher für einen Punkt $Q_0 = (y_0, w_0, p_0) \in G$ eine Hyperebene $h(Q_0)$ im \mathbb{R}^{n+1} durch

$$(3.2) \quad h(Q_0) := \{(y, w) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid w = w_0 + p_0 \cdot (y - y_0)\}$$

Aus der Definition (3.2) folgt offensichtlich, dass

- 1) $h(Q_0) \perp (p_0, -1)$ und
- 2) $(y_0, w_0) \in h(Q_0)$

DEFINITION 3.1. Die Hyperebene $h(Q_0)$ heißt Integralelement von (3.1), falls $F(Q_0) = 0$.

Mit Hilfe von Integralelementen läßt sich eine klassische Lösung angeben: die Oberfläche $w = u(y)$ ist eine klassische Lösung von (3.1), falls alle ihre Tangentialebenen Integralelemente sind.

1.1. Quasilineare Differentialgleichungen. Besonders anschaulich wird die geometrische Interpretation bei quasilinearen Gleichungen:

DEFINITION 3.2. Die partielle Differentialgleichung (3.1) heißt quasilinear, falls F linear in p ist, d.h. die Gleichung ist linear in ∇u , aber nicht in y und u ,

$$F(y, w, p) = a(y, w) \cdot p - b(y, w)$$

wobei $a, b \in C(U \times \mathbb{R})$.

Sei nun $u(y)$ die Lösung einer quasilinearen Gleichung, (x_0, w_0) ein beliebiger Punkt auf der Lösungsfläche $w = u(y)$ und

$$a_0 := a(x_0, w_0), \quad b_0 := b(x_0, w_0)$$

Dann gilt

LEMMA 3.3. *Die Hyperebene $h(Q_0)$ ist ein Integralelement, falls die Ebene die Gerade durch den Punkt (y_0, w_0) in Richtung (a_0, b_0) enthält, d.h.*

$$\{(y, w) \mid y = y_0 + \lambda a_0, w = w_0 + \lambda b_0, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset h(Q_0)$$

Diese Gerade wird auch als Mongesche Gerade bezeichnet.

BEWEIS. Nach Definition ist die Hyperebene $h(Q_0)$ an einem Punkt $Q_0 \in G$ ein Integralelement, falls $a_0 \cdot p_0 = b_0$. Diese Bedingung ist aber gleichbedeutend mit $(a_0, b_0) \perp (p_0, -1)$. Da aber $(p_0, -1)$ gerade die Normale der Hyperebene $h(Q_0)$, folgt die Aussagen des Lemmas. \square

BEMERKUNG 3.4. *Gilt $(a_0, b_0) = (0, 0)$, so entartet die Mongesche Gerade zu einem Punkt und jede Hyperebene durch den Punkt (y_0, w_0) ist ein Integralelement.*

DEFINITION 3.5. *Seien $a, b \in C(U \times \mathbb{R})$. Dann bezeichnen wir mit $y = y(\tau)$ und $w = w(\tau)$, $\tau \in J \subset \mathbb{R}$ die (lokale) Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= a(y, w), & y(0) &= y_0 \\ \frac{dw}{d\tau} &= b(y, w), & w(0) &= w_0 \end{aligned}$$

Das System nennt man charakteristisches System der partiellen Differentialgleichung

$$a(y, u) \cdot \nabla u - b(y, u) = 0$$

Die Lösungen des Systems heißen charakteristische Kurven, die Projektion durch Kurven auf die Menge U , d.h. die Kurven $y = y(\tau)$, charakteristischen Grundkurven.

BEMERKUNG 3.6. *Die Tangenten an charakteristische Kurven sind offensichtlich Mongesche Geraden.*

SATZ 3.7. *Die Funktion $u \in C^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine klassische Lösung der partiellen Differentialgleichung $a(y, u) \cdot \nabla u - b(y, u) = 0$, falls für alle $y_0 \in U$ eine charakteristische Kurve $(y(\tau), w(\tau))$ durch den Punkt (y_0, w_0) existiert, sodass $w(\tau) = u(y(\tau))$ für alle $\tau \in J$, d.h. die charakteristische Kurve liegt in der Lösungsfläche.*

BEWEIS. Sei $u = u(y)$ eine Lösung, $y_0 \in U$ und $w_0 = u(y_0)$. Da a eine stetige Funktion ist, existiert eine lokale Lösung $y : J \rightarrow U$ des Anfangswertproblems

$$\frac{dy}{d\tau} = a(y, u(y)), \quad y(0) = y_0$$

Sei $w(\tau) = u(y(\tau))$, dann gilt

$$\frac{dw(\tau)}{d\tau} = \frac{dy(\tau)}{d\tau} \cdot \nabla u(y(\tau)) = a(y(\tau), u(y(\tau))) \cdot \nabla u(y(\tau)) = b(y(\tau), u(y(\tau)))$$

da u eine Lösung ist. Also ist $(y(\tau), w(\tau))$ eine charakteristische Kurve, die durch den Punkt (y_0, w_0) läuft.

Für die umgekehrte Richtung sei $u \in C^1(U)$ eine Funktion und (y_0, w_0) gegeben. Durch den Punkt (y_0, w_0) läuft eine charakteristische Kurve $(y(\tau), w(\tau))$, $\tau \in J$, sodass $w(\tau) = u(y(\tau))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} (u(y(\tau)) - w(\tau))|_{\tau=0} = a(y(\tau), w(\tau)) \cdot \nabla u(y(\tau)) - b(y(\tau), w(\tau))|_{\tau=0} \\ &= a(y_0, w_0) \cdot u(y_0) - b(y_0, w_0) \end{aligned}$$

Also löst u im Punkt y_0 die partielle Differentialgleichung $a \cdot \nabla u - b = 0$. □

BEMERKUNG 3.8. Sind die beiden Funktionen a und b , die das charakteristische System definieren, Lipschitz-stetig, so existiert eine eindeutige charakteristische Kurve, die durch den Punkt (y_0, w_0) läuft. Gleichzeitig heißt das, dass u genau dann eine Lösung ist, falls jede charakteristische Kurve vollständig in der Lösungsfläche liegt.

BEISPIEL 3.9. Wir betrachten die einfache Kontinuitätsgleichung

$$u_t + cu_x = 0$$

mit $a = (1, c)$, $b = 0$ und $y = (x, t)$. Das charakteristische System ist gegeben durch

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 \quad \frac{dx}{d\tau} = c \quad \frac{dw}{d\tau} = 0$$

und somit lauten die charakteristischen Kurven

$$t = \tau + t_0 \quad x = c\tau + x_0 \quad w = w_0$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Variable τ eliminieren und erhält

$$x = x_0 + c(t - t_0) \quad w = w_0$$

Die charakteristischen Grundkurven sind damit

$$x - ct = x_0 - ct_0 = \text{const}$$

also Geraden. Die charakteristischen Kurven verlaufen parallel zu den Grundkurven und liegen in der Lösungsfläche. Das heißt aber auch, dass die Lösungen konstant entlang der charakteristischen Grundkurven $x - ct = \text{const}$ sind, d.h. $u(x, t) = f(x - ct)$ mit $u(x, 0) = f(x) = u_0(x)$ und

$$u(t, x) = u_0(x - ct)$$

was wir bereits aus Kapitel 1 und 2 wissen.

BEISPIEL 3.10. Wir untersuchen die Gleichung

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} = \alpha u$$

Das charakteristische System lautet diesmal

$$\frac{dy_1}{d\tau} = y_1, \quad \frac{dy_2}{d\tau} = y_2, \quad \frac{dw}{d\tau} = \alpha w$$

und für die charakteristischen Kurven erhält man

$$y_1(\tau) = c_1 e^\tau, \quad y_2(\tau) = c_2 e^\tau, \quad w(\tau) = c_3 e^{\alpha\tau}$$

Daraus folgt, dass die charakteristischen Grundkurven durch

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{c_2}{c_1} = k = \text{const}$$

gegeben sind, also Strahlen der Form $y_2 = ky_1$ sind. Weiterhin gilt $w(\tau) = c_3 (e^\tau)^\alpha = cy_1^\alpha$, wobei c fest ist und nur von der zugehörigen Grundkurve abhängig ist.

Liegt der Punkt (y_1, y_2) auf der Grundkurve, so ebenfalls $(\lambda y_1, \lambda y_2)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Also gilt

$$u(\lambda y_1, \lambda y_2) = c(\lambda y_1)^\alpha = \lambda^\alpha c y_1^\alpha = \lambda^\alpha u(y_1, y_2)$$

und für alle Punkte $y \in \mathbb{R}^2$ gilt $u(\lambda y) = \lambda^\alpha u(y)$ d.h. u ist eine homogene Funktion vom Grad α . Dieses Ergebnis ist der zweidimensionale Fall des sogenannten Eulerschen Satzes: ist die Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ homogen vom Grad α , so löst u die Eulersche Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial u}{\partial y_i} = \alpha u,$$

Wir verwenden nun die Charakteristikenmethode zur Lösung von allgemeinen Anfangswertaufgaben bei quasilinearen Differentialgleichungen.

DEFINITION 3.11. Sei $y = (x, t)$. Dann lautet das Anfangswertproblem bei quasilinearen Differentialgleichungen

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + A(x, t, u) \cdot \nabla u(x, t) = B(x, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

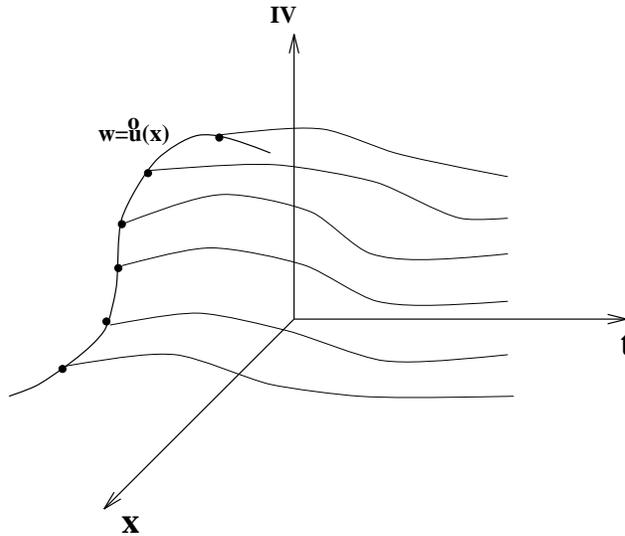


Bild 3.1: Die charakteristischen Kurven bilden wie Fäden die Lösungsfläche.

Das charakteristische System lautet daher allgemein

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = A(x, \tau, w), \quad \frac{dw}{d\tau} = B(x, \tau, w)$$

Man kann also $\tau = t$ wählen und erhält die Gleichungen

$$(3.4) \quad \frac{dx}{d\tau} = A(x, \tau, w), \quad \frac{dw}{d\tau} = B(x, \tau, w)$$

Nehmen wir an, dass A, B stetig differenzierbar sind, so sind die zu (3.4) gehörenden Anfangswertprobleme eindeutig lösbar, d.h. es existiert ein Intervall J um $t = 0$, sodass das charakteristische System mit den Anfangsbedingungen

$$x(s) = x_0 \quad w(s) = w_0$$

für $t, s \in J$ die eindeutige Lösung $x(t) = X_{t,s}(x_0, w_0) w(t) = W_{t,s}(x_0, w_0)$ besitzt. Dabei gilt

$$X_{t,t}(x_0, w_0) = x_0, \quad W_{t,t}(x_0, w_0) = w_0,$$

Damit läßt sich auf folgende Weise die Lösung $u(\xi, \tau)$ der Differentialgleichung an einem Punkt (ξ, τ) berechnen: wir suchen zunächst die charakteristische Grundkurve, die durch den Punkt (ξ, τ) läuft, d.h.

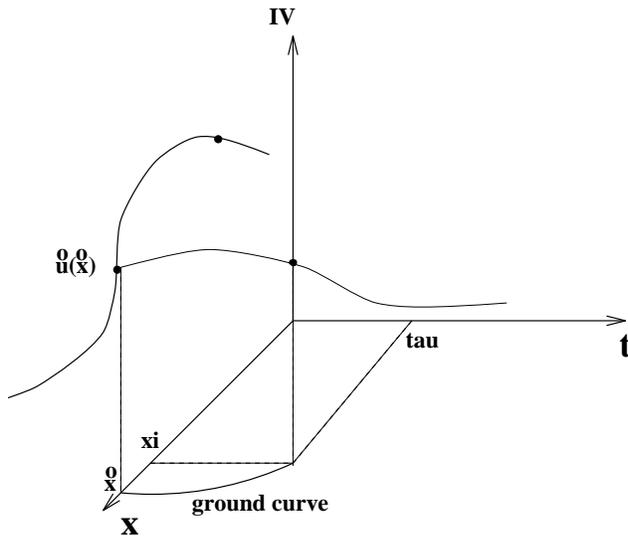


Bild 3.2: Um die Lösung zu berechnen, laufen wir entlang der Grundkurven zurück zur Anfangsbedingung und anschliessend in der Lösungsfläche zurück.

wir suchen den Punkt x_0 , sodass

$$X_{\tau,0}(x_0, u(x_0)) = \xi$$

Definieren wir

$$T_{\tau}(x_0) = X_{\tau,0}(x_0, u(x_0))$$

müssen wir also zur Berechnung von x_0 die nichtlineare Gleichung

$$T_{\tau}(x_0) = \xi$$

lösen, wobei der Punkt (ξ, τ) gegeben ist.

Da die Determinante von $D_x T_\tau$ eine stetige Funktion in τ ist, ist die Abbildung T_τ für genügend kleines τ lokal invertierbar und es existiert ein Punkt x_0 mit

$$x_0 = T_\tau^{-1}(\xi)$$

der die richtige charakteristische Grundkurve definiert. Damit läßt sich die Lösung am Punkt (ξ, τ) schreiben als

$$(3.5) \quad u(\xi, \tau) = W_{\tau,0}(T_\tau^{-1}(\xi), u_0(T_\tau^{-1}(\xi)))$$

SATZ 3.12. *Seien $A, B \in C^1(U \times \mathbb{R})$. Dann liefert die Darstellung (3.5) eine lokale Lösung des Anfangswertproblems (3.3)*

BEISPIEL 3.13. *Wir betrachten wiederum die Gleichung $u_t + cu_x = 0$ mit dem charakteristischen System $\dot{x} = c$ und $\dot{w} = 0$. Die Lösung lautet*

$$X_{t,s}(x_0, w_0) = c(t - s) + x_0, \quad W_{t,s}(x_0, w_0) = w_0$$

und man berechnet

$$X_{\tau,0}(x_0, u_0(x_0)) = c\tau + x_0 = T_\tau(x_0) = \xi \Rightarrow x_0 = \xi - c\tau = T_\tau^{-1}(\xi)$$

Daraus folgt offensichtlich

$$u(\xi, \tau) = W_{\tau,0}(\xi - c\tau, u_0(\xi - c\tau)) = u_0(\xi - c\tau)$$

BEMERKUNG 3.14. *Für homogene Gleichungen, also $B = 0$, erhält man immer*

$$W_{\tau,0}(x_0, w_0) = w_0$$

und daher

$$u(\xi, \tau) = u_0(T_\tau^{-1}(x_i))$$

Die Konstruktion einer Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmethode wird bei linearen, homogenen Gleichungen der Form

$$u_t + A(x, t) \cdot \nabla u = 0$$

noch einfacher. Hier haben wir nur das Anfangswertproblem $\dot{x} = A(x, t)$, $x(0) = x_0$ zu lösen. Insbesondere ist der Fluß $X_{\tau,s}(x_0, w_0)$ unabhängig von w_0 und es gilt

$$x(\tau) = X_{\tau,0}(x_0) = T_\tau(x_0)$$

Auch die Umkehrfunktion T_τ^{-1} läßt sich einfacher bestimmen: es gilt $T_\tau^{-1}(\xi) = X_{\tau,0}^{-1}(\xi)$ und aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen folgt $X_{\tau,0}^{-1} = X_{0,\tau}$. Um also den Punkt $x_0 = T_\tau^{-1}(\xi)$ zu berechnen, löst man einfach das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = A(x, t), \quad x(\tau) = \xi$$

und erhält $x_0 = x(0)$.

BEISPIEL 3.15. Wir betrachten die Gleichung $u_t + txu_x = 0$. Dann gilt

$$\dot{x} = tx, \quad x(\tau) = \xi \Rightarrow x(t) = \exp\left(\frac{t^2 - \tau^2}{2}\right) \xi$$

Mit $x(0) = x_0 = \exp(-\tau^2/2)\xi$ erhalten wir die Lösung

$$u(\tau, \xi) = u_0\left(\exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right) \xi\right)$$

Lineare, inhomogene Gleichungen werden nach dem folgenden Prinzip gelöst:

- 1) Man berechnet $x_0 = X_{0,\tau}(\xi)$
- 2) Man löst die Gleichung $\dot{w} = B(x, t) = B(X_{t,0}(x_0), t)$ und erhält die Lösung $w(t) = W_{t,0}(x_0, w_0)$ in der Form

$$w(t) = w_0 + \int_0^t B(\sigma, X_{s,0}(x_0)) ds$$

- 3) Dann gilt

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) &= W_{\tau,0}(X_{0,\tau}(\xi), u_0(X_{0,\tau}(\xi))) \\ &= u_0(X_{0,\tau}(\xi)) + \int_0^\tau B(s, X_{s,\tau}(\xi)) ds \end{aligned}$$

Hängt die Funktion A nicht von t ab, $A(x, t) = A(x)$, so ist die Differentialgleichung $\dot{x} = A(x)$ eine autonome Gleichung. Dann gilt $X_{t,s}(x_0) = X_{t-s}(x_0)$. Weiterhin können wir in diesem Fall die Halbgruppeneigenschaft des Flußes X_t verwenden, d.h. es gilt $X_t \circ X_s = X_{s+t}$. Daraus folgt natürlich direkt $X_t^{-1} = X_{-t}$.

1.2. Nichtlineare Gleichungen. Wir kommen nun zur Charakteristikenmethode für allgemeine nichtlineare Gleichungen

$$(3.6) \quad F(y, u, \nabla u) = 0$$

in $U \subset \mathbb{R}^n$ mit Randbedingungen $u = g$ auf Γ , wobei $\Gamma \subseteq \partial U$ und $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben. Die Idee ist, für einen festen Punkt $y \in U$ eine charakteristische Grundkurve zu finden, die den Punkt y mit einem Randpunkt $y_0 \in \Gamma$ verbindet. Dann erhalten wir, analog zum vorhergehenden Abschnitt, die Lösung von (3.6), in dem wir die charakteristische Kurve von $(y_0, g(y_0))$ bis $(y, u(y))$ berechnen.

Sei also $y(s) = (y_1(s), \dots, y_n(s))$ eine Parametrisierung der charakteristischen Grundkurve mit $s \in J \subset \mathbb{R}$. Für $u \in C^2(U)$ Lösung von (3.6) setzen wir

$$(3.7) \quad w(s) := u(y(s))$$

und

$$(3.8) \quad p(s) := \nabla u(y(s))$$

Wir berechnen zunächst

$$(3.9) \quad \frac{dp_i}{ds} = \sum_{j=1}^n u_{y_i y_j}(y(s)) \frac{dy_j(s)}{ds}$$

Um eine Darstellung für die zweiten Ableitungen $u_{y_i y_j}$ zu erhalten, differenzieren wir die Gleichung (3.6) nach y_i :

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y, u, \nabla u) + \frac{\partial F}{\partial w}(y, u, \nabla u) u_{y_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}(y, u, \nabla u) u_{y_i y_j} = 0$$

Setzen wir nun

$$(3.10) \quad \frac{dy_j}{ds} = \frac{\partial F}{\partial p_j}(y(s), w(s), p(s))$$

so erhalten wir mit (3.7), (3.8) die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y(s), w(s), p(s)) + \frac{\partial F}{\partial w}(y(s), w(s), p(s)) p_i(s) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}(y(s), w(s), p(s)) u_{y_i y_j} = 0$$

Dies zusammen mit (3.10) in (3.9) eingesetzt ergibt

$$(3.11) \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}(y(s), w(s), p(s)) - \frac{\partial F}{\partial w}(y(s), w(s), p(s)) p_i(s)$$

Schließlich können wir (3.8) ableiten und erhalten

$$\frac{dw}{ds} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j}(y(s)) \frac{dy_j(s)}{ds} = \sum_{j=1}^n p_j(s) \frac{\partial F}{\partial p_j}(y(s), w(s), p(s))$$

Fassen wir alles zusammen, erhalten wir also $2n + 1$ gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, die das charakteristische System der nichtlinearen Differentialgleichung (3.6) bilden:

$$(3.12) \quad \frac{dy(s)}{ds} = D_p F(y(s), w(s), p(s))$$

$$(3.13) \quad \frac{dw(s)}{ds} = D_p F(y(s), w(s), p(s)) \cdot p(s)$$

$$(3.14) \quad \frac{dp(s)}{ds} = -D_y F(y(s), w(s), p(s)) - D_w F(y(s), w(s), p(s)) p(s)$$

SATZ 3.16. Sei $u \in C^2(U)$ eine Lösung von (3.6) in U . Wir nehmen an, dass $y(\cdot)$ die Differentialgleichung (3.12) mit $w(\cdot) = u(y(\cdot))$ und $p(\cdot) = \nabla u(y(\cdot))$. Dann löst $w(s)$ die Differentialgleichung (3.13), $p(s)$ die Differentialgleichung (3.14) und zwar für die Werte von s , für die $x(s) \in U$ gilt.

BEISPIEL 3.17. Wir suchen die Lösung des nichtlinearen Problems

$$\begin{cases} u_{x_1} u_{x_2} = u & \text{in } U \\ u = x_2^2 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

mit $U = \{x_1 > 0\}$ und $\Gamma = \partial U = \{x_1 = 0\}$. Das charakteristische System lautet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= p_2, & \dot{x}_2 &= p_1 \\ \dot{w} &= 2p_1p_2 \\ \dot{p}_1 &= p_1, & \dot{p}_2 &= p_2\end{aligned}$$

Wir lösen zunächst die Gleichungen für p_1 und p_2 :

$$\begin{aligned}p_1(s) &= p_1^0 e^s \\ p_2(s) &= p_2^0 e^s\end{aligned}$$

Diese Lösungen setzen wir in die ersten beiden Gleichungen des charakteristischen Systems ein und erhalten

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= p_2^0 e^s \\ \dot{x}_2 &= p_1^0 e^s \\ \dot{w} &= 2p_1^0 p_2^0 e^{2s}\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}x_1(s) &= 2x_0(e^s - 1) \\ x_2(s) &= x_0(e^s + 1)/2 \\ w(s) &= (x_0)^2 e^{2s}\end{aligned}$$

wobei wir bereits die vorgegebenen Randbedingungen berücksichtigt haben: auf dem Rand $x_1 = 0$ gilt $u(0, x_0) = x_0^2$ und damit $u_{x_2}(0, x_0) = 2x_0$. Dies liefert den Wert für p_2 am Rand. Aus der Differentialgleichung erhalten wir $p_1p_2 = w$ und damit am Rand $p_1^0 p_2^0 = w_0 = x_0^2$. Damit folgt direkt $p_1^0 = x_0/2$.

Sei nun der Punkt (x_1, x_2) fest, dann suchen wir einen Punkt x_0 sowie ein s mit $(x_1, x_2) = (2x_0(e^s - 1), x_0(e^s + 1)/2)$. Aus dieser nichtlinearen Gleichung für x_0 und s folgt

$$x_0 = \frac{4x_1 - 1}{4}, \quad e^s = \frac{x_1 + 4x_2}{4x_2 - x_1}$$

Damit lautet die Lösung

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2) &= u(x_1(s), x_2(s)) = w(s) = (x_0)^2 e^{2s} \\ &= \frac{(x_1 + 4x_2)^2}{16}\end{aligned}$$

2. Nichtlineare skalare Erhaltungsgleichungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir Cauchyprobleme für nichtlineare skalare Erhaltungsgleichungen,

$$(3.15) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine vorgegebene nichtlineare Flußfunktion ist. Zur Lösung des Anfangswertproblems (3.15) wollen wir wieder die Charakteristikenmethode verwenden. Dabei stellt man aber direkt fest, dass das Konzept klassischer Lösungen zusammenbricht.

2.1. Verdünnungs- und Stoßwellen. Wir wollen die Lösung des Anfangswertproblem mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens berechnen: die skalare Erhaltungsgleichung läßt sich auch in der Form

$$u_t + f'(u)u_x = 0$$

schreiben, d.h. wir erhalten eine quasilineare Gleichung. Nach Abschnitt 3.1.1 lautet das charakteristische System

$$\begin{cases} \dot{x} = f'(w) & x(0) = x_0 \\ \dot{w} = 0 & w(0) = w_0 \end{cases}$$

Aus $w(t) = w_0$ folgt

$$x(t) = f'(w_0)t + x_0 = X_{t,0}(x_0, w_0)$$

Also sind die charakteristischen Grundkurven Geraden, deren Steigungen von dem Anfangswert $w_0 = u(x_0)$ abhängen. Um nun die Lösung $u(t, x)$ zu bestimmen, müssen wir für x_0 mit (x, t) gegeben die Gleichung

$$(3.16) \quad T_t(x_0) = f'(u_0(x_0))t + x_0 = x$$

lösen. Dies wird im Allgemeinen nicht global in der Zeit t möglich sein.

BEMERKUNG 3.18. *Da entlang der charakteristischen Grundkurve die Beziehung $u(t, x) = u_0(x_0)$ gilt, kann man zur Lösung des Problems ebenfalls die Gleichung*

$$u(t, x) = u_0(x - h(u(t, x))t)$$

betrachten, wobei hier der Wert $u(x, t)$ die Unbekannte ist.

Ein klassisches Beispiel, für das die Gleichung (3.16) nicht für beliebige Zeiten $t > 0$ lösbar, ist die nichtlineare Burgers-Gleichung

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Die charakteristischen Grundkurven sind

$$(3.17) \quad x(t) = u_0(x_0)t + x_0$$

und daher abhängig von der vorgegebenen Anfangsbedingung u_0 . Wählen wir etwa

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x < 0 \\ 1 - x & : x \in [0, 1] \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

so erhalten wir aus (3.17) die Grundkurven

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0 & : x_0 < 0 \\ (1 - x_0)t + x_0 & : x_0 \in [0, 1] \\ x_0 & : x_0 > 1 \end{cases}$$

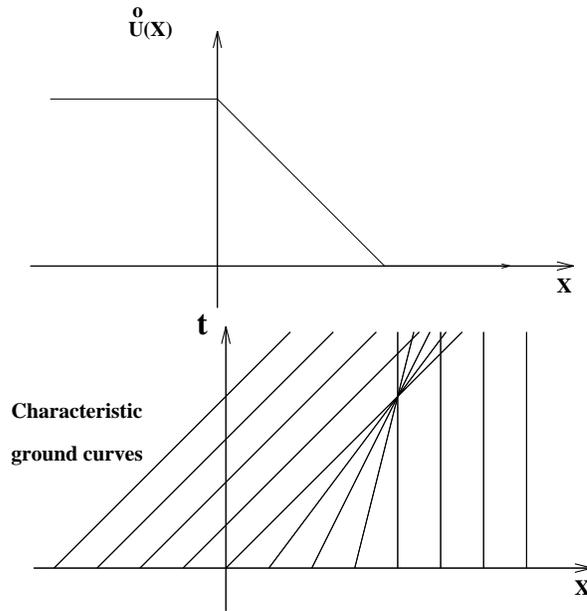


Bild 3.3: Anfangsbedingung und zugehörige charakteristische Grundkurven.

Die Gleichung (3.16) ist für $t < 1$ lösbar und wir erhalten die klassische Lösung des Problems in der Form

$$(3.18) \quad u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < t \\ (1-x)/(1-t) & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

denn für $0 \leq t \leq x < 1$ gilt

$$x_0 = T_t^{-1}(x) = \frac{x-t}{1-t}$$

und daher

$$u(t, x) = u_0(x_0) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x-t}{1-t} = \frac{1-x}{1-t}$$

Was mit der Lösung für $t \rightarrow 1$ passiert, ist im Bild 3.4a dargestellt: es entsteht eine sogenannte **Verdichtungswelle** und man muss den Begriff einer klassischen Lösung, also eine differenzierbare Lösung, auf das Konzept der schwachen Lösungen abschwächen. Diese Thematik werden wir im nächsten Abschnitt behandeln.

Zuvor untersuchen wir noch das Verhalten der Lösung der Burgers-Gleichung, falls die Anfangsbedingung eine monoton steigende Funktion in x ist. Ist u_0 weiterhin eine glatte Funktion, so füllen die Charakteristiken den gesamten (x, t) -Raum aus (siehe Bild 3.4b). Das bedeutet aber gleichzeitig, dass die Gleichung (3.16) global, d.h. für alle $t > 0$ lösbar ist und demnach funktioniert die Charakteristikenmethode auf dem ganzen Raum.

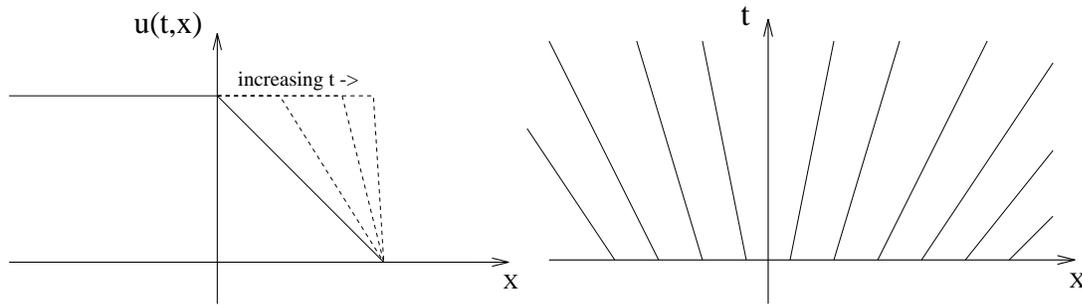


Bild 3.4: Entstehung einer Verdichtungswelle und charakteristische Grundkurven für eine monoton steigende Anfangsbedingung u_0 .

Beinhaltet die Anfangsbedingung eine Sprungstelle (also eine Unstetigkeitsstelle), zum Beispiel in der Form

$$u_0(x) = \begin{cases} c_1 & : x \leq 0 \\ c_2 & : x > 0 \end{cases}$$

mit $c_1 < c_2$, so ergibt die Methode der Charakteristiken

$$u(t, x) = \begin{cases} c_1 & : x \leq c_1 t \\ c_2 & : x > c_2 t \end{cases}$$

aber der (x, t) -Raum enthält einen Bereich, in dem die Lösung nicht definiert ist, da keine charakteristische Grundkurve in diesen Bereich läuft (siehe auch Bild 3.5b)

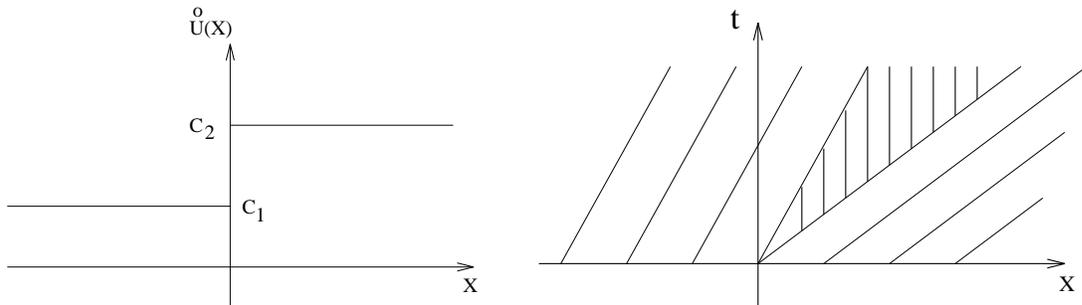


Bild 3.5: Anfangsbedingung mit einer Sprungstelle und resultierende charakteristische Grundkurven.

Diesen Phänomen bezeichnet man als eine **Verdünnungswelle**. Auch in diesem Fall bricht das Konzept einer klassischen Lösung, die sich mit Hilfe der Charakteristikenmethode berechnen lässt zusammen.

2.2. Schwache Lösungen bei skalaren Erhaltungsgleichungen. Am Beispiel der Burgers-Gleichung haben wir gesehen, dass bei nichtlinearen Erhaltungsgleichungen der Begriff einer klassischen Lösung zusammenbricht: wir hatten dazu zwei typische Situationen untersucht, nämlich die einer Stoßwelle, bei der Charakteristiken in einem Punkt zusammenlaufen, und den Fall einer Verdünnungswelle, bei der Bereiche in der (x, t) -Ebene existieren, in denen keine Charakteristiken liegen.

Wir kommen daher zum Begriff einer **schwachen Lösung** von Erhaltungsgleichungen der

Form (3.15). Sei dazu $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit kompakten Träger. Eine solche Funktion bezeichnen wir als eine Testfunktion. Multiplizieren wir die Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$ mit einer Testfunktion v und integrieren über $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x) v dx dt \\ &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty uv_t dx dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x,0) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)v_x dx dt \end{aligned}$$

Setzt man nun noch die Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ des Cauchyproblems an, so ergibt sich

$$(3.19) \quad \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x,0) dx = 0$$

Es ist offensichtlich, dass die Gleichung (3.19) auch dann sinnvoll ist, wenn u nicht glatt, sondern zum Beispiel nur beschränkt ist. Wir definieren daher

DEFINITION 3.19. *Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ heißt Integrallösung von (3.15), falls (3.19) für alle Testfunktionen v erfüllt ist.*

Mit Hilfe von Integrallösungen sind wir in der Lage, die beiden Phänomene, nämlich Stoß- und Verdünnungswelle als schwache Lösungen von Erhaltungsgleichungen zu interpretieren. Wir untersuchen zunächst den Fall einer Stoßwellenlösung:

DEFINITION 3.20. *Eine Stoßwellenlösung u ist eine Integrallösung der Erhaltungsgleichung (3.15), wenn eine sogenannte **Stoßfront** $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, sodass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung von (3.15) ist und u bei $x = s(t)$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe $[u](t) = u(t, s(t)^+) - u(t, s(t)^-)$ besitzt. Die Größe $\dot{s}(t)$ nennt man die Stoßgeschwindigkeit.*

Die Stoßgeschwindigkeit \dot{s} (und damit auch die Sprunghöhe $[u]$) bestimmt man aus der Bedingung (3.19): die Stoßfront $x = s(t)$ definiert eine Kurve $C = \{(x, t) | x = s(t)\}$ in die ein offenes Gebiet $U \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ mit $C \subset U$ in einen linken und rechten Bereich U_l und U_r unterteilt, in dem die Funktion u jeweils differenzierbar ist.

Sei also v eine Testfunktion mit kompaktem Träger in U . Dann gilt

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x) dx dt = \iint_{U_l} (uv_t + f(u)v_x) dx dt + \iint_{U_r} (uv_t + f(u)v_x) dx dt$$

Da u jeweils in U_l und U_r eine klassische Lösung ist, können wir partiell integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \iint_{U_l} (uv_t + f(u)v_x) dx dt &= \int_C (u_l \nu_2 + f(u_l) \nu_1) v dl \\ \iint_{U_r} (uv_t + f(u)v_x) dx dt &= - \int_C (u_r \nu_2 + f(u_r) \nu_1) v dl \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ den Einheitsnormalenvektor an die Kurve C , wobei ν von U_l in den Bereich U_r zeigt. Weiterhin bezeichnen die Symbole u_l und u_r die Grenzwerte der Funktion u von links bzw. rechts.

Durch Addition erhalten wir also die Bedingung

$$\int_C ((F(u_l) - F(u_r)) \nu_1 + (u_l - u_r) \nu_2) v dl$$

die für alle Testfunktionen v gilt. Daraus folgt aber direkt entlang der Kurve C die Bedingung

$$(3.20) \quad (F(u_l) - F(u_r)) \nu_1 + (u_l - u_r) \nu_2 = 0$$

Wir müssen nun noch den Normalenvektor $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ bestimmen:

$$\nu = (\nu_1, \nu_2) = (1 + \dot{s}^2)^{-1/2} (1, -\dot{s})$$

Damit erhalten wir aus (3.20) die Stoßgeschwindigkeit in der Form

$$(3.21) \quad [f] = \dot{s}[u]$$

wobei $[u] = u_l - u_r$ und $[f] = f(u_l) - f(u_r)$ die Sprunghöhe in u und dem Fluß $f(u)$ bezeichnen.

SATZ 3.21. *Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit \dot{s} die Beziehung*

$$(3.22) \quad \dot{s}[u] = [f]$$

Die Gleichung (3.22) bezeichnet man als Rankine–Hugoniot Bedingung.

BEMERKUNG 3.22. *Die Stoßwellenlösung ist genau dann eine schwache Lösung, wenn sie die Rankine–Hugoniot Bedingung erfüllt.*

BEISPIEL 3.23. *Wir betrachten wiederum die Burgers–Gleichung*

$$u_t + uu_x = 0$$

und berechnen mit $f(u) = u^2/2$

$$[f] = \frac{u_l^2 - u_r^2}{2} = \frac{(u_l + u_r)[u]}{2}$$

Damit ergibt sich für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s} = (u_l + u_r)/2$. Mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x < 0 \\ 1-x & : x \in [0, 1] \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

ergibt sich also für $t < 1$ die klassische Lösung

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & : x < t \\ \frac{1-x}{1-t} & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

Für $t \geq 1$ setzen wir die Lösung durch die Stoßwelle

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & : x \leq s(t) \\ 0 & : x > s(t) \end{cases}$$

fort. Da $\dot{s}(t) = (u_l + u_r)/2 = 1/2$ erhält man

$$s(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

denn bei $t = 1$ gilt $s(1) = 1$. Die Stoßwellenlösung lautet daher für $t \geq 1$

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & : x \leq \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ 0 & : x > \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wir kommen nun zum Konzept von Integrallösungen beim Auftreten einer Verdünnungswelle:

BEISPIEL 3.24. Wir betrachten wieder die Burgers-Gleichung, diesmal mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$$

Wir versuchen als die Lücke im (x, t) -Raum, in der keine charakteristische Grundkurve liegt, zu füllen

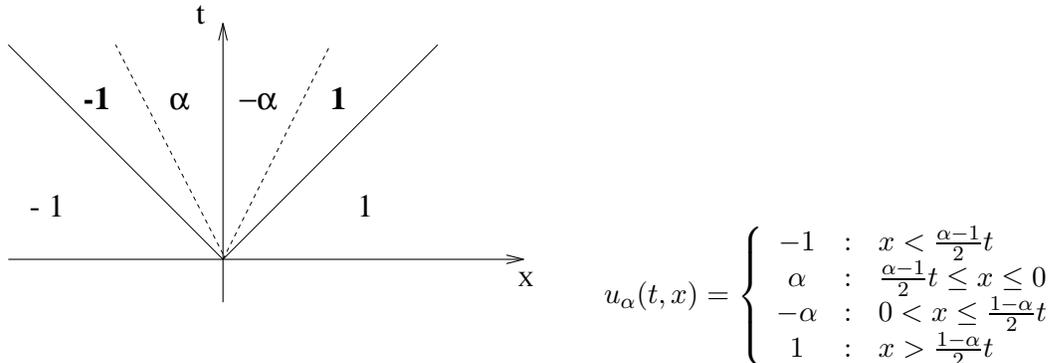


Bild 3.6: Integrallösung für die Anfangsbedingung $u_0(x) = \text{sign}(x)$.

Die angegebene Lösung erfüllt offensichtlich die Rankine–Hugoniot Bedingung, allerdings für alle $-1 \leq \alpha \leq 1$. Man findet allerdings noch andere Lösungen, zum Beispiel

$$(3.23) \quad u(x, t) = \begin{cases} -1 & : x < -t \\ x/t & : -t \leq x \leq t \\ 1 & : x > t \end{cases}$$

d.h. die Lücke wird durch die Werte x/t ausgefüllt.

BEISPIEL 3.25. Wir nehmen die Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$$

Dann erhalten wir zum Beispiel die beiden Lösungen

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & : x \leq t/2 \\ 1 & : x > t/2 \end{cases}$$

und

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x/t & : 0 \leq x \leq t \\ 1 & : x > t \end{cases}$$

Die erste Lösung repräsentiert eine unphysikalische Stoßwelle, die zweite wiederum ein Verdünnungswelle.

Wir sehen also, dass durch das Konzept von Integrallösungen die Eindeutigkeit von Lösungen verloren geht. Wir müssen uns also überlegen, durch welche Zusatzbedingungen wir eindeutige Integrallösungen bekommen. Diese Lösungen sollen natürlich die physikalisch korrekten Lösungen sein.

Ein weitere Problem beim Konzept von Integrallösungen ist, dass die Stoßbedingung, die wir in der Form der Rankine–Hugoniot Bedingung ausgedrückt hatten, nicht invariant gegenüber Transformationen des Systems ist. Dies überlegen wir uns wiederum an einem einfachen Beispiel:

BEISPIEL 3.26. Wir betrachten die skalare Erhaltungsgleichung

$$(3.24) \quad u_t + f(u)_x = 0, f'' > 0$$

wobei die Flußfunktion strikt konvex ist, d.h. $f'' > 0$. Mit der Transformation $F = f'(u)$ lautet die Gleichung (3.24)

$$F_t + \left(\frac{F^2}{2} \right)_x = 0$$

da

$$F_t + FF_x = f''(u)u_t + f'(u)f''(u)f'(u)u_x = f''(u)(u_t + f'(u)u_x) = 0$$

Formulieren wir die Rankine–Hugoniot Bedingung für (3.24), so erhalten wir für die Stoßgeschwindigkeit die Formel

$$U_1 = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{1}{u_l - u_r} \int_{u_l}^{u_r} f'(u) du;$$

dagegen ergibt sich für die transformierte Gleichung

$$U_2 = \frac{1}{2}(F_l + F_r) = \frac{1}{2}(f'(u_l) + f'(u_r))$$

Es gilt $U_1 = U_2$ nur, falls

$$(3.25) \quad \frac{1}{u_l - u_r} \int_{u_l}^{u_r} f'(u) du = \frac{1}{2}(f'(u_l) + f'(u_r))$$

Soll (3.25) für alle u_l, u_r gültig sein, so benötigen wir (mit $f' = g$)

$$\underbrace{\frac{1}{y-x} \int_x^y g(\xi) d\xi}_{\text{integraler Mittelwert}} = \underbrace{\frac{1}{2}(g(x) + g(y))}_{\text{arithmetischer Mittelwert}}$$

Für festes x differenzieren wir nach y und erhalten

$$g(y) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y)) + \frac{1}{2}(y-x)g'(y)$$

woraus die Gleichung

$$g'(y) = \frac{g(y) - g(x)}{y-x} \Leftrightarrow g \text{ linear} \Leftrightarrow f(u) = a + bu + u^2$$

folgt. Für andere Flüsse ergibt die Transformation also eine andere Stoßgeschwindigkeit.

2.3. Entropiebedingungen und Eindeutigkeit von Integrallösungen. Um bei Integrallösungen eindeutige Lösungen zu erhalten, müssen zusätzliche Bedingungen gefordert werden, die man als **Entropiebedingungen** bezeichnet. Diese Bedingungen wurden zuerst bei Problemen aus der Strömungsdynamik verwendet. Einige typische Bedingungen sind

1) Die **Lax–Oleinik–Bedingung**: es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $z > 0$ gilt

$$u(t, x+z) - u(t, x) < \frac{C}{t}z$$

Wir werden später sehen, dass Integrallösungen, die zusätzlich die Lax–Oleinik–Bedingung erfüllen, eindeutig sind. Diese Bedingung schließt direkt Stoßwellen mit einer negativen Sprunghöhe $[u] = u_l - u_r$ aus.

2) Die **Kausalitätsbedingung**: für Stoßwellen soll gelten

$$f'(u_r) < \dot{s} < f'(u_l)$$

Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit vor der Stoßwelle kleiner als hinter der Stoßwelle ist. Dies ist aus physikalischer Sicht eine sinnvolle Bedingung, denn Stöße entstehen dadurch, dass Charakteristiken ineinanderlaufen. Die Kausalitätsbedingung erzwingt die Eindeutigkeit von Integrallösungen.

3) Die Lax-Bedingung: sei η eine beliebige konvexe Funktion (nämlich die Entropie des Systems) und σ gegeben durch $\sigma' = \eta' f'$. Das Paar (η, σ) heißt Entropie-Entropiefluß-Paar, falls gilt

$$\eta(u)_t + \sigma(u)_x \leq 0$$

Folgende Stoßbedingung erzwingt dann ebenfalls die Eindeutigkeit von Integrallösungen: es gilt

$$\dot{s} \leq \frac{\sigma_l - \sigma_r}{\eta_l - \eta_r}$$

für alle Entropie-Entropiefluß-Paare (η, σ) .

BEISPIEL 3.27. Wir betrachten die Lösungen $u_\alpha(x, t)$ aus Beispiel 3.24,

$$u_\alpha(t, x) = \begin{cases} -1 & : x < \frac{\alpha-1}{2}t \\ \alpha & : \frac{\alpha-1}{2}t \leq x \leq 0 \\ -\alpha & : 0 < x \leq \frac{1-\alpha}{2}t \\ 1 & : x > \frac{1-\alpha}{2}t \end{cases}$$

sowie die Verdünnungswelle

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & : x < -t \\ x/t & : -t \leq x \leq t \\ 1 & : x > t \end{cases}$$

Die Lösungen u_α erfüllen offensichtlich nicht die Lax-Oleinik Bedingung an der Sprungstelle von $x = (\alpha - 1)t/2$, denn $u_r - u_l = \alpha + 1 > 0$. Dagegen erfüllt die Verdünnungswelle $u(x, t)$ die Lax-Oleinik Bedingung. Zum Beispiel gilt für $x < -t$ und $x + z > t$, also $z > 2t$

$$u(x + z, t) - u(x, t) = 2 < \frac{z}{t}$$

BEMERKUNG 3.28. Es gibt noch eine andere Methode eindeutige Integrallösungen zu bekommen: man wählt solche Lösungen aus, die sich als Grenzwerte $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(x, t)$ von Lösungen der Differentialgleichung

$$(3.26) \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial f(u^\varepsilon)}{\partial x} = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon$$

darstellen lassen. Die Gleichung (3.26) besitzt für $\varepsilon > 0$ (mit geeigneten Rand- und/oder Anfangsbedingungen) aufgrund des Diffusions- oder auch Viskositätsterms $\varepsilon u_{xx}^\varepsilon$ eine eindeutige, klassische Lösungen.

Wir beschränken uns im weiteren Verlauf auf die Lax-Oleinik-Bedingung und zeigen, dass Integrallösungen, die zusätzlich diese Bedingung erfüllen eindeutig sind. Zunächst formulieren wir einen Existenzsatz von Entropielösungen der nichtlineare Erhaltungsgleichung

$$(3.27) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei $f \in C^2$ und $f'' > 0$, d.h. f ist strikt konvex.

SATZ 3.29. Sei $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ und sei $f \in C^2$ mit $f'' > 0$ auf $\{u \mid |u| \leq \|u_0\|_\infty\}$. Dann existiert eine Integrallösung von (3.27) mit den folgenden Eigenschaften:

1) $|u(x, t)| \leq \|u_0\|_\infty = M$ für $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$

2) Es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $z > 0$ $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(3.28) \quad u(x+z, t) - u(x, t) < \frac{C}{t}z$$

3) Die Lösung u ist stabil und hängt stetig von dem Anfangswert u_0 ab, d.h. ist $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|v_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ und v die zugehörige Lösung von (3.27) mit Anfangswert v_0 , dann gilt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ und jedes $t > 0$

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u_0(x) - v_0(x)| dx$$

mit $A = \max\{|f'(u)| \mid |u| \leq \|u_0\|_\infty\}$.

BEWEIS. siehe J. Smoller, Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations, Springer Verlag (1980). \square

BEMERKUNG 3.30. Die Konstante C hängt nur von den folgenden Größen ab: M , $\mu := \min\{f''(u) \mid |u| \leq \|u_0\|_\infty\}$ und $A = \max\{|f'(u)| \mid |u| \leq \|u_0\|_\infty\}$

Eine Integrallösung, die die Entropiebedingung (3.28) erfüllt, nennen wir auch **Entropielösung**. Weiter sind Entropielösungen eindeutig.

SATZ 3.31. Sei $f \in C^2$, $f'' > 0$ und seien u und v zwei Entropielösungen. Dann gilt $u = v$ fast überall in $t > 0$.

BEWEIS. siehe J. Smoller. \square

Als Beispiel zu Entropielösungen wollen wir die Lösung des allgemeinen Riemannproblems angeben, d.h. wir betrachten das Problem (3.27) mit der Anfangsbedingung für $u_l \neq u_r$

$$(3.29) \quad u_0(x) = \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x > 0 \end{cases}$$

Für die Flußfunktion gelte wieder $f \in C^2$, $f'' > 0$ und wir setzen $g = (f')^{-1}$.

SATZ 3.32. Für $u_l > u_r$ ist die eindeutige Entropielösung des Riemannproblems (3.27), (3.29) gegeben durch die Stoßwellenlösung

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & : x < \sigma t \\ u_r & : x > \sigma t \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

wobei die Stoßgeschwindigkeit σ durch die Rankine–Hugoniot Bedingung gegeben ist,

$$\sigma := \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

Für $u_l < u_r$ ist die eindeutige Entropielösung des Riemannproblems (3.27), (3.29) die Verdünnungswelle

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & : x < f'(u_l)t \\ g(x/t) & : f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_r & : x > f'(u_r)t \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

BEWEIS. Die angegebene Stoßwellenlösung ist eine Integrallösung, da sie die Rankine–Hugoniot Bedingung erfüllt. Gleichzeitig gilt wegen $u_l > u_r$

$$u(x+z, t) - u(x, t) \leq 0$$

und damit ist auch die Entropiebedingung (3.28) erfüllt.

Die Verdünnungswelle ist konstant für $x < f'(u_l)t$ und $x > f'(u_r)t$ und löst daher die vorgegebene Erhaltungsgleichung. Für $f'(u_l)t < x < f'(u_r)t$ berechnet man

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{x}{t^2}g'(x/t) \\ f(u)_x &= f(g(x/t))_x = f'(g(x/t))\frac{g'(x/t)}{t} = \frac{x}{t^2}g'(x/t) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $g(x/t)$ ebenfalls die Gleichung $u_t + f(u)_x = 0$ löst.

Es bleibt also zu untersuchen, dass die Verdünnungswelle die Entropiebedingung (3.28) erfüllt: hier genügt es den Fall $f'(u_l)t < x, x+z < f'(u_r)t$ zu betrachten. Es gilt

$$u(x+z, t) - u(x, t) = g\left(\frac{x+z}{t}\right) + g\left(\frac{x}{t}\right) \leq L\left(\frac{x+z}{t} - \frac{x}{t}\right) = L\frac{z}{t}$$

wobei L die Lipschitz–Konstante der Funktion g bezeichnet. Diese existiert da $g \in C^2$ angenommen wurde. \square

Zum Abschluss geben wir noch zwei Resultate (ohne Beweise, siehe etwa im Textbuch von Evans) zum Langzeitverhalten von Entropielösungen, das natürlich von der zugrundeliegenden Norm abhängig ist.

Sei f glatt, $f(0) = 0$ und u_0 beschränkt und integrierbar. Dann gilt:

SATZ 3.33. *Es existiert eine Konstante C , sodass*

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t^{1/2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Der Satz besagt also, dass die L^∞ –Norm der Lösung für $t \rightarrow \infty$ gegen Null geht.

Für die L^1 –Norm zeigt man dagegen folgendes Resultat:

SATZ 3.34. *Sei $f(0) = 0$ und die Integrallösung von u habe einen kompakten Träger in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx$$

Der Beweis dieses Satzes ist eine kleine Übungsaufgabe.

Bezüglich der L^1 -Norm kann man sogar noch mehr zeigen, nämlich, dass u in L^1 im Grenzwert $t \rightarrow \infty$ eine sehr einfache Gestalt annehmen muss. Dazu nehmen wir an, dass u_0 einen kompakten Träger besitzt.

Für gegebene Konstanten $p, q \geq 0$, $d > 0$ und σ definieren wir die N-Welle als

$$N(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{d} \left(\frac{x}{t} - \sigma \right) & -(pdt)^{1/2} + \sigma t < x < (qdt)^{1/2} + \sigma t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Konstante σ ist also die Geschwindigkeit der N-Welle. Sei nun

$$\begin{aligned} \sigma &:= f'(0) \\ d &:= f''(0) > 0 \\ p &:= -2 \min_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^y u_0(x) dx \\ q &:= 2 \max_{y \in \mathbb{R}} \int_y^{\infty} u_0(x) dx \end{aligned}$$

Dann gilt folgende asymptotische Aussage für die Lösung u :

SATZ 3.35. *Sei $p, q > 0$. Dann existiert eine Konstante C , sodass*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - N(x, t)| dx \leq \frac{C}{t^{1/2}}$$

für alle $t > 0$.

3. Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

In diesem Abschnitt betrachten wir (quasilineare) Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$(3.30) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n A^{(i)}(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = B(x, t, u)$$

wobei $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u = (u_1, \dots, u_m)$ die gesuchte Funktion ist. In der Gleichung (3.30) sind $A^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ gegebene $m \times m$ Matrizen, sowie $B \in \mathbb{R}^m$.

Wir geben einige Beispiele zu solchen Systemen: wir haben bereits in Kapitel 1 ein quasilineares System kennengelernt, nämlich die (isentropen) kompressiblen Euler-Gleichungen.

Ein den Euler–Gleichungen ähnliches System sind die sogenannten Flachwasserwellengleichungen in der Form

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(gh + u^2/2)}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $h = h(x, t)$ die Höhe, $u = u(x, t)$ die Geschwindigkeit der Wasserwelle am Ort x zur Zeit t , sowie g die Gravitationskonstante.

Ein anderes Beispiel sind die Cauchy–Riemanschen Differentialgleichungen aus der komplexen Analysis

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

DEFINITION 3.36. Gegeben sei das quasilineare System (3.30). Dann bezeichnet man mit $Q(P; \lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ mit $P = (x, t, u)$ gegeben durch

$$Q(P; \lambda, \xi_1, \dots, \xi_n) = \det \left(\lambda E_m + \sum_{i=1}^n \xi_i A^{(i)}(P) \right)$$

als charakteristische Form von (3.30). Eine Fläche

$$F = \{(x, t) \mid \Phi(x, t) = 0\}, \quad \Phi \in C^1$$

nennt man charakteristische Fläche bezüglich der gegebenen Lösung u , falls die Normale e an die Fläche

$$e = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t), \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x, t), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(x, t) \right)$$

die Gleichung

$$Q(P; e) = 0 \quad \forall P = (x, t, u(x, t))$$

erfüllt.

Wir geben zunächst ein Beispiel zu einer nichtcharakteristischen Fläche.

BEISPIEL 3.37. Sei F die Anfangsmannigfaltigkeit für $t = 0$, d.h. $F = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$. Dann ist die Normale an F gegeben durch $e = (0, \dots, 0, 1)$ und damit

$$Q(P, e) = \det E_m = 1 \neq 0$$

Also ist F nichtcharakteristisch.

Wir betrachten nun die Fläche F gegeben durch

$$F = \{(x, t) \mid \Psi(x) - t = 0\},$$

d.h. für t fest ist die Menge $\{x \mid \Psi(x) = t\}$ gerade eine Niveaumenge von F . Dann sind die Normalenvektoren an F von der Form

$$e = (-1, \Psi_{x_1}, \dots, \Psi_{x_n})$$

und die Fläche F ist charakteristisch, falls

$$Q(P; -1, \nabla_x \Psi) = 0$$

Da die charakteristische Form Q die Determinante einer Matrix ist, multiplizieren wir mit $1/|\nabla_x \Psi|$ und erhalten

$$F \text{ charakteristisch} \quad \Leftrightarrow \quad Q \left(P; -\frac{1}{|\nabla_x \Psi|}, \frac{\nabla_x \Psi}{|\nabla_x \Psi|} \right) = 0$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} |v| &= \frac{1}{|\nabla_x \Psi|} \in \mathbb{R}_+ \\ \alpha &= \frac{\nabla_x \Psi}{|\nabla_x \Psi|} \in S^{n-1} \end{aligned}$$

Dann ist α die Einheitsnormale an die Fläche $\Psi(x) = t$ und wir erhalten folgende geometrische Deutung der beiden Größen $|v|$ und α : die Niveaumenge $\{x \mid \Psi(x) = t\}$ kann als eine **Wellenfront** interpretiert werden, d.h. $W^t = \{x \mid \Psi(x) = t\}$.

Wir wollen nun die Geschwindigkeit der Wellenfront W^t in Richtung α , also in Normalenrichtung, berechnen: sei dazu der Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Element der Niveaumenge, d.h. $\Psi(x_0) = t$. Dann gilt

$$x_0 + \lambda \alpha \in W^{t+\delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(x_0 + \lambda \alpha) = t + \delta t$$

und wir wählen λ , sodass $\Psi(x_0 + \lambda \alpha) = t + \delta t$

Um die Geschwindigkeit w der Wellenfront zu bestimmen, untersuchen wir den Grenzwert $\lambda \rightarrow 0$: hier gilt

$$\begin{aligned} w &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|\lambda|}{|\delta t|} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|\lambda|}{|\Psi(x_0 + \lambda \alpha) - \Psi(x_0)|} = \left| \frac{1}{\partial_\alpha \Psi(x_0)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\nabla \Psi(x_0) \cdot \alpha} \right| = \left| \frac{|\nabla \Psi(x_0)|}{\nabla \Psi(x_0) \cdot \nabla \Psi(x_0)} \right| = \frac{1}{|\nabla \Psi(x_0)|} = |v| \end{aligned}$$

Die Wellenfront bewegt sich also in Normalenrichtung α gerade mit der Geschwindigkeit $|v|$.

Gleichzeitig ist $\Psi(x) = t$ eine charakteristische Fläche, falls für gegebenes α die Geschwindigkeit $|v|$ gerade ein Eigenwert der Matrix $\sum \alpha_i A^{(i)}$ ist. Dies sieht man folgendermaßen: ist α gegeben, so muss $|v|$ eine Nullstelle von $Q(P; -|v|, \alpha)$ sein. Dies bedeutet aber gerade, dass

$$Q(P; -|v|, \alpha) = \det \left(-|v| E_m + \sum_{i=1}^n \alpha_i A^{(i)} \right) = 0$$

ist, also ist $|v|$ ein Eigenwert von $\sum \alpha_i A^{(i)}$.

Diese Eigenwerte bezeichnen wir daher auch als Normalgeschwindigkeiten und verwenden sie um Systeme erster Ordnung zu klassifizieren.

DEFINITION 3.38. *Das System (3.30) heißt (strikt) hyperbolisch in Richtung $e = (\tau, x_i)$ mit $|e| = 1$, falls*

- 1) $Q(P; e) \neq 0$
- 2) für jeden Vektor $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $e \perp \eta$, $\eta \neq 0$ besitzt die Funktion $\lambda \rightarrow Q(P; \lambda e + \eta)$ nur (paarweise verschiedene) reelle Nullstellen.

BEMERKUNG 3.39. Eine für uns wichtige Richtung ist die Zeitrichtung mit $e = (1, 0)$. Dann ergibt jeder Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ den zu e orthogonalen Vektor $\eta = (0, \xi)$. Weiterhin ist $\lambda e + \eta = (\lambda, \xi)$ und

$$\lambda \rightarrow Q(P; \lambda e + \eta) = \det \left(\lambda E_m + \sum \xi^i A^{(i)}(P) \right)$$

Das System (3.30) ist also dann und nur dann (strikt) hyperbolisch in der Zeit, wenn die Matrix $\sum \xi_i A^{(i)}(P)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ nur (paarweise) verschiedene reelle Eigenwerte besitzt.

DEFINITION 3.40. Ist für alle $\xi \neq 0$ kein Eigenwert von $\sum_{i=1}^n \xi_i A^{(i)}$ reell, dann heißt das System elliptisch.

BEISPIEL 3.41. Wir können die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auch in der Form

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_y = 0$$

schreiben, d.h. die Variable x übernimmt die Rolle der Zeitvariablen t . Dann ist

$$A := A^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\sum_{i=1}^n \xi_i A^{(i)} = \xi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind gerade $\lambda = \pm i$ und das System ist demnach elliptisch.

BEISPIEL 3.42. Man kann die eindimensionale Wellengleichung $y_{tt} - y_{xx} = 0$ auch als ein System schreiben: wir setzen $u = y_t$, $v = y_x$ und erhalten zunächst die skalare Gleichung $u_t = v_x$. Die Symmetriebedingung $y_{xt} = y_{tx}$ liefert eine zweite Gleichung nämlich $v_t = u_x$. Wir erhalten demnach das System

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x$$

sodass

$$-A^{(1)} = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Zeitrichtung müssen wir die Gleichung

$$\det(\lambda E_2 + \xi A) = \det \left(\lambda E_2 - \xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

betrachten. Die Eigenwerte sind gegeben durch $\pm \xi$ und daher paarweise verschieden und reell. Das System ist also strikt hyperbolisch und 1 ist die (positive) Normalgeschwindigkeit in die Richtungen $+1$ oder -1 .

BEISPIEL 3.43. Für die Flachwasserwellengleichungen haben wir $A = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}$ und

$$\det(\lambda E_2 + \xi A) = (\lambda + \xi u)^2 - \xi gh = 0$$

Für $h > 0$ erhält man wegen $g > 0$ die beiden Nullstellen

$$\lambda = -(u \pm \sqrt{gh})\xi$$

Das System ist also in Zeitrichtung strikt hyperbolisch, solange $h > 0$ ist. Die Normalgeschwindigkeiten sind dabei gegeben durch $-u \pm \sqrt{gh}$. Das System ist nur hyperbolisch, falls h in einem Bereich Null wird.

3.1. Hyperbolische Systeme mit konstanten Koeffizienten. Im diesem Abschnitt nehmen wir an, dass die Matrizen $A^{(i)}$ unabhängig von P sind und betrachten nur homogene Systeme, d.h. $B = 0$. Dies bedeutet, dass der Begriff hyperbolisch in Zeitrichtung nicht vom Ort, der Zeit oder der Lösung selbst abhängt, sondern vielmehr eine Eigenschaft des Systems ist. Wir betrachten also Anfangswertprobleme der Form

$$(3.31) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n M_i \frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

und nehmen an, dass das System (3.31) hyperbolisch in der Zeit ist. Wir untersuchen zunächst den Fall $n = 1$. Dann lautet das System

$$(3.32) \quad u_t = M u_x$$

Die Gleichung (3.32) ist hyperbolisch in Zeitrichtung, falls die Matrix M nur reelle Eigenwerte besitzt; strikt hyperbolisch, falls die reellen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ paarweise verschieden sind.

Ist das System strikt hyperbolisch, so besitzt die Matrix M die m linear unabhängigen Eigenvektoren a_1, \dots, a_m und diese bilden eine Basis des \mathbb{R}^m . Insbesondere kann dann die Anfangsbedingung $u_0(x)$ mit Hilfe dieser Eigenvektoren dargestellt werden,

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(x) a_i$$

Das System (3.32) ist linear. Daher kann die Lösung durch Superposition berechnet werden und es genügt das Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \Phi(x)a$$

zu lösen. Dabei ist a ein Eigenvektor von M und $\Phi \in C^1$. Die Lösung dieses Problems ist allerdings trivial:

$$u(t, x) = \Phi(x + \lambda t)a$$

Damit ergibt sich

SATZ 3.44. Die Matrix M habe m paarweise verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Weiter sei a_1, \dots, a_m eine zugehörige Basis von Eigenvektoren. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = M \frac{\partial u}{\partial x} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(x + \lambda_i t) a_i$$

wobei

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(x) a_i$$

Ist das System (3.32) nur hyperbolisch, aber nicht strikt hyperbolisch, so sind alle Eigenwerte reell, aber nicht notwendigerweise paarweise verschieden. Eigenwerte können eine algebraische Vielfachheit besitzen, die unterschiedlich von der geometrischen Vielfachheit sein kann. Dementsprechend existiert nicht notwendigerweise eine Basis aus Eigenvektoren und man muss auf die Jordansche Normalform übergehen. Dann gilt

LEMMA 3.45. Ist a ein Hauptvektor der Stufe r zum Eigenwert λ und $u_0(x) = \Phi(x)a$, $\Phi \in C^r$, dann ist die Lösung des Anfangswertproblems (3.32) gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} \Phi^{(k)}(x + \lambda t) (M - \lambda E)^k a$$

BEWEIS. Man berechnet

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{k=1}^{r-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \Phi^{(k)}(x + \lambda t) (M - \lambda E)^k a + \lambda \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} \Phi^{(k+1)}(x + \lambda t) (M - \lambda E)^k a \\ &= \sum_{k=0}^{r-2} \frac{t^k}{k!} \Phi^{(k+1)}(x + \lambda t) (M - \lambda E)^{k+1} a + \lambda \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} \Phi^{(k+1)}(x + \lambda t) (M - \lambda E)^k a \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} \Phi^{(k+1)}(x + \lambda t) (M - \lambda E)^{k+1} a + \lambda \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} \Phi^{(k+1)}(x + \lambda t) (M - \lambda E)^k a \\ &= (M - \lambda E + \lambda E) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} \Phi^{(k+1)}(x + \lambda t) (M - \lambda E)^k a = M u_x \end{aligned}$$

□

Im Fall mehrerer Ortsvariablen $x \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$ haben wir

$$(3.33) \quad u_t = \sum_{k=1}^n M_k u_{x_k}$$

und die charakteristische Form lautet

$$Q(\lambda; \xi) = \det \left(\lambda E_m - \sum_{k=1}^n \xi_k M_k \right)$$

Das System (3.33) ist strikt hyperbolisch in Zeitrichtung, falls $Q(\lambda; \xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ reelle und paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1(\xi) < \dots < \lambda_m(\xi)$ besitzt. Die zugehörigen normierten Eigenvektoren bezeichnen wir mit a_1, \dots, a_m .

Wir bestimmen nun die Lösung von (3.33) zum Anfangswert $u(0, x) = u_0(x)$, den wir in eine beliebigen Basis darstellen können,

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(x) e_i$$

Also betrachten wir den Fall

$$(3.34) \quad u_0(x) = \Phi(x)a$$

wobei $a \in \mathbb{R}^m$ beliebig und $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

SATZ 3.46. *Existiert ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ und ein $i \in \{1, \dots, m\}$, sodass*

$$(3.35) \quad u_0(x) = \varphi(x \cdot \xi) a_i(\xi)$$

so ist die Lösung von (3.33) mit Anfangsbedingung (3.34) gegeben durch

$$u(x, t) = \varphi(x \cdot \xi + \lambda_i(\xi)t) a_i(\xi)$$

BEMERKUNG 3.47. *Die Darstellung (3.35) besagt, dass die Anfangsbedingung u_0 auf einer Ebene senkrecht zu ξ konstant ist und eine bevorzugte Richtung hat. Die Lösung $u(x, t)$ ist eine in Richtung ξ mit Geschwindigkeit $\lambda_i(\xi)$ (für $|\xi| = 1$) laufende Welle*

BEWEIS. Wir berechnen

$$u_t = \varphi'(\dots) \lambda_i(\xi) a_i(\xi), \quad u_{x_k} = \varphi'(\dots) \xi_k a_i(\xi)$$

Dann gilt

$$u_t - \sum_{k=1}^n M_k u_{x_k} = \varphi'(\dots) \underbrace{\left(\lambda_i(\xi) E_m - \sum_{k=1}^n \xi_k M_k \right)}_{=0 \text{ (} a_i(\xi) \text{ EV)}} a_i(\xi)$$

□

Wir nehmen nun eine Anfangsbedingung der Form

$$(3.36) \quad u_0(x) = \varphi(x \cdot \xi) a$$

wobei $a \in \mathbb{R}^m$ beliebig, ξ beliebig, aber fest ist. Wir zerlegen den Vektor a in die Eigenvektoren a_1, \dots, a_m

$$a = \sum_{i=1}^m c_i(a; \xi) a_i(\xi)$$

wobei wir wiederum annehmen, dass das System strikt hyperbolisch ist.

SATZ 3.48. *Das Anfangswertproblem für (3.34) mit Anfangsbedingung (3.36) besitzt die Lösung*

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m \varphi(x \cdot \xi + \lambda_i(\xi)t) c_i(a; \xi) a_i(\xi)$$

BEMERKUNG 3.49. *Man zerlegt also den gegebenen Vektor a in gewisse Richtungen, für die die Wellengeschwindigkeiten $\lambda(\xi)$ bekannt sind.*

Den allgemeinen Fall einer Anfangsbedingung $u_0(x) = \Phi(x)a$ läßt sich auf den zweiten Fall reduzieren, falls man die Funktion $\Phi(x)$ in ebene Wellen zerlegt:

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x \cdot \xi) c(\xi) d\xi$$

Dies erreicht man zum Beispiel durch Verwendung der Fouriertransformation,

$$\widehat{\Phi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y \cdot \xi)} \Phi(y) dy$$

definiert für $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die inverse Fouriertransformation lautet

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x \cdot \xi)} \widehat{\Phi}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\widehat{\Phi}(\xi)}_{c(\xi)} \underbrace{\frac{e^{-i(x \cdot \xi)}}{(2\pi)^n}}_{\Psi(x \cdot \xi)} d\xi \end{aligned}$$

die entsprechend für $\widehat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert ist. Man beachte, dass $\widehat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nicht aus $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt. Wir lösen nun das Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung

$$(3.37) \quad u_0(x) = \frac{\widehat{\Phi}(\xi)}{(2\pi)^n} e^{-i(x \cdot \xi)} a$$

Aus Satz 3.48 erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{j=1}^m e^{-i[(x \cdot \xi) + \lambda_j(\xi)t]} \frac{\widehat{\Phi}(\xi)}{(2\pi)^n} \underbrace{c_j(a, \xi) a_j(\xi)}_{=a_j^*(a, \xi)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-i(x \cdot \xi)} \sum_{j=1}^m e^{-i\lambda_j(\xi)t} \widehat{\Phi}(\xi) a_j^*(a, \xi) \end{aligned}$$

Integration über ξ liefert die allgemeine Lösung in der Form

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x \cdot \xi)} \widehat{\Phi}(\xi) \sum_{j=1}^m e^{-i\lambda_j(\xi)t} a_j^*(a, \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x \cdot \xi)} \widehat{\Phi}(\xi) \widehat{w}(\xi, t) d\xi \\ &= (\widehat{\Phi} \widehat{w})^\vee(x) \end{aligned}$$

SATZ 3.50. Die Lösung des Anfangswertproblems (3.34) mit Anfangsbedingung (3.37) ist gegeben durch

$$(3.38) \quad u(x, t) = (\widehat{\Phi} \widehat{w})^\vee$$

wobei

$$\begin{aligned} \widehat{w}(\xi, t) &= \sum_{j=1}^m e^{-i\lambda_j(\xi)t} c_j(a, \xi) a_j(\xi) \\ a &= \sum_{i=1}^m c_i(a; \xi) a_i(\xi) \end{aligned}$$

und $^\vee$ die inverse Fouriertransformation bezeichnet.

4. Analytische Lösung einfacher quasilinearer Systeme

Wir beschränken uns auf den Fall $m = 2$, d.h. wir betrachten quasilineare Systeme der Form

$$u_t + A(u)u_x = 0$$

wobei $A(u)$ eine von der Lösung U abhängige 2×2 -Matrix ist. Die Matrix $A(u)$ erhält man normalerweise aus einem System von nichtlinearen Erhaltungsgleichungen,

$$u_t + f(u)_x = 0$$

wobei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und A die Jakobimatrix vom Fluß f ist, d.h. $A = DF$.

Die erste Lösungsdarstellung, die wir herleiten wollen, basiert auf dem sogenannten **Einfachen Wellenlösung**: hier suchen wir Lösungen, die durch den Ansatz $u_1 = H(u_2)$ bestimmt werden können.

Als Beispiel betrachten wir das System der Flachwasserwellengleichungen:

$$\begin{aligned} h_t + uh_x + hu_x &= 0 \\ u_t + gh_x + uu_x &= 0 \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Ansatzes $h = H(u)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} H'(u)u_t + H'(u)uu_x + H(u)u_x &= 0 \\ u_t + gH'(u)u_x + uu_x &= 0 \end{aligned}$$

und damit die Bestimmungsgleichung für $H(u)$ in der Form

$$gH'(u)u = \frac{H(u)}{H'(u)}$$

Dies liefert die Differentialgleichung

$$(3.39) \quad gH'(u) = \pm \sqrt{gH}$$

Setzt man (3.39) in die Impulsgleichung ein (wir verwenden das Vorzeichen +), so ergibt sich die skalare quasilineare Gleichung

$$u_t + (u + \sqrt{gH})u_x = 0$$

die gelöst werden kann, falls wir die Funktion $H(u)$ bestimmt haben. which one can solve, if we have the expression for $H(u)$. Integrieren wir die Differentialgleichung (3.39), so bekommen wir

$$\frac{(gH')}{\sqrt{gH}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gH(0)} = u$$

beziehungsweise

$$\sqrt{gH} = \frac{u}{2} + \sqrt{gH(0)} = \frac{u}{2} + c_0$$

Damit ergibt sich die Impulsgleichung in der Form

$$u_t + \left(\frac{3}{2}u + c_0\right)u_x = 0,$$

die mit Hilfe der Charakteristikenmethode gelöst werden kann. Verwendet man den negativen Zweig in (3.39) so erhält man eine andere Lösung.

Ein allgemeinerer Ansatz bei quasilinearen Systemen ist das Konzept der **Riemann-Invarianten**. Dies sind bestimmte Größen, die entlang der charakteristischen Kurven des Problems konstant bleiben. Sei dazu das System

$$u_t = M(u)u_x$$

mit der charakteristischen Form $Q(u; \lambda) = \det(\lambda E - M(u))$. Wir nehmen an, dass das System die reellen Eigenwerte $\lambda_1(u), \lambda_2(u)$ und es existiere eine Basis aus den Eigenvektoren $r^{(1)}, r^{(2)}$ des \mathbb{R}^2 ,

$$M \cdot r^{(i)} = \lambda_i r^{(i)}, \quad r^{(i)} = r^{(i)}(u), \quad i = 1, 2$$

Weiterhin sei $(l^{(1)}, l^{(2)})$ eine Basis von Linkseigenvektoren, d.h.

$$l^{(j)} \cdot M = \lambda_j l^{(j)}, \quad j = 1, 2$$

DEFINITION 3.51. *Ist die Lösung $u = u(x, t)$ gegeben, so schreiben wir für die Eigenwerte von M auch $\lambda_i(u) = \lambda_i(x, t)$. Man nennt den Vektor $(-\lambda_i(x, t), 1)$ i -tes charakteristisches Feld. Das zugehörige Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx}{d\tau} = -\lambda_i(x, \tau) \quad \frac{dt}{d\tau} = 1$$

mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ und $t(0) = t_0$ habe eine eindeutige Lösung. Dann definiert die Lösung $x(\tau) = x^{(i)}(\tau; x_0, t_0)$ und $t(\tau) = \tau + t_0$ eine Kurve $C_{(x_0, t_0)}^{(i)}$ in der (x, t) -Ebene, die man als i -te charakteristische Kurve bezeichnet.

Als ein erstes Beispiel zu Riemann–Invarianten betrachten wir wieder die Flachwasserwellengleichungen. Für dieses System kann man die Riemann–Invarianten auf eine einfache Weise berechnen: in Matrixschreibweise lautet das System

$$\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_x = 0$$

Mit der charakteristischen Form $\lambda E - M(U) = 0$, berechnet man die beiden Eigenwerte λ_i als Lösungen der Gleichung $(\lambda + u)^2 = gh$ und damit $\lambda_{1/2} = -u \pm \sqrt{gh}$. Die charakteristischen Kurven sind also gegeben durch $\dot{x} = u \mp \sqrt{gh}$.

Statt der Unbekannten h und u , verwenden wir nun die beiden Größen $c = \sqrt{gh}$ und u , sodass

$$c_x = \frac{1}{2}(gh)^{-1/2}gh_x \quad \text{und} \quad cc_x = \frac{g}{2}h_x$$

Die neuen Gleichungen lauten somit

$$\begin{cases} u_t + uu_x + 2cc_x = 0 \\ c_t + uc_x + \frac{1}{2}cu_x = 0 \end{cases}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit 2 und addieren zur ersten Gleichung und erhalten

$$(u + 2c)_t + (u + c)(u + 2c)_x = 0$$

Dementsprechend ergibt sich die zweite Gleichung zu

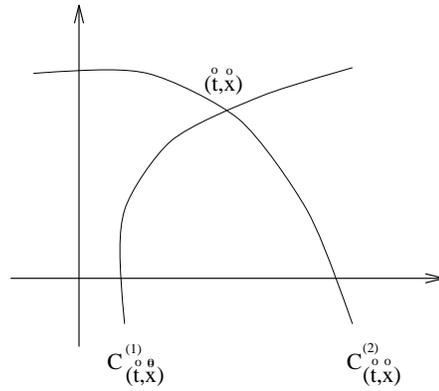
$$(u - 2c)_t + (u - c)(u - 2c)_x = 0$$

Setzen wir die unbekannt Funktionen als die beiden Terme $u + 2c$ und $u - 2c$, so erhalten wir die beiden charakteristischen Kurven

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= u + c \\ \dot{x}^{(2)} &= u - c \end{aligned}$$

entlang derer die Größen $u + 2c$ und $u - 2c$ konstant bleiben. Die beiden Größen $u + 2c$ und $u - 2c$ sind dabei die beiden Riemann–Invarianten. Diese sind jeweils konstant entlang der zugehörigen charakteristischen Kurven definiert durch $\dot{x}^{(1)} = u + c$ und $\dot{x}^{(2)} = u - c$.

Wir betrachten nun ein beliebiges strikt hyperbolisches quasilineares System und geben eine allgemeine Definition von Riemann–Invarianten: das charakteristische Feld des Systems definiert zwei Kurvenscharen $\{C_{(x_0, t_0)}^{(1)} \mid (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)\}$ und $\{C_{(x_0, t_0)}^{(2)} \mid (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)\}$. Wir verwenden diese Kurvenscharen um die gegebenen (x, t) -Koordinaten auf ein neues System (α, β) abzubilden. Dabei sollen die gegebenen Kurvenscharen $\{C_{(x_0, t_0)}^{(1)}\}$ und $\{C_{(x_0, t_0)}^{(2)}\}$ auf die beiden Geraden $\beta = \beta_0$ und $\alpha = \alpha_0$ abgebildet werden.

Bild 3.7: Die charakteristischen Kurven in der (x, t) -Ebene.

Wir nehmen dazu eine beliebige, nirgends charakteristische Kurve γ , die keine Doppelpunkte besitzt,

$$\gamma : s \rightarrow (x(s), t(s)), \quad s \in J$$

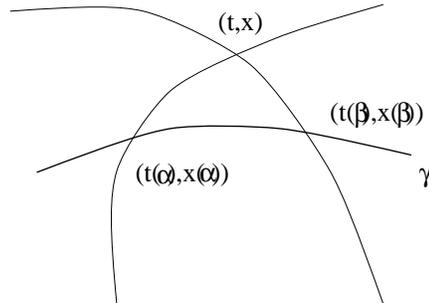
Liegt der Punkt (x, t) in der Umgebung von γ , so existieren Schnittpunkte

$$C_{(x,t)}^{(1)} \cap \gamma = (x(\beta), t(\beta))$$

$$C_{(x,t)}^{(2)} \cap \gamma = (x(\alpha), t(\alpha))$$

da γ nirgends charakteristisch ist.

Wir definieren nun eine Abbildung $\Lambda : (x, t) \rightarrow (\alpha, \beta)$, wie in Bild 3.8 dargestellt:

Bild 3.8: Die geometrische Definition für die Abbildung Λ .

Lokal, d.h. nahe bei γ , ist die Abbildung Λ injektiv und Λ^{-1} ist gegeben durch

$$\Lambda^{-1} : (\alpha, \beta) \rightarrow C_{(x(\beta), t(\beta))}^{(1)} \cap C_{(x(\alpha), t(\alpha))}^{(2)} = (x(\alpha, \beta), t(\alpha, \beta))$$

und existiert für $|\alpha - \beta|$ genügend klein und $\alpha < \beta$ (oder $\beta < \alpha$). Gleichzeitig liefert die Abbildung Λ die richtige Darstellung der Kurven $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$: für alle $(x, t) \in C_{(x_0, t_0)}^{(1)}$, haben wir $\beta(x, t) = \text{const} = \beta(x_0, t_0) = \beta_0$ und damit

$$(3.40) \quad \Lambda \left(C_{(x_0, t_0)}^{(1)} \right) = \{(\alpha, \beta) \mid \beta = \beta_0\}$$

Dementsprechend gilt für $C_{(x_0, t_0)}^{(2)}$

$$(3.41) \quad \Lambda \left(C_{(x_0, t_0)}^{(2)} \right) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha = \alpha_0\}$$

Man schreibt daher auch $C_{\beta_0}^{(1)} = C_{(x_0, t_0)}^{(1)}$ und $C_{\alpha_0}^{(2)} = C_{(x_0, t_0)}^{(2)}$.

Wir verwenden (α, β) als neue Koordinaten und transformieren entsprechend die Funktion $u(x, t)$ und das zugehörige Differentialgleichungssystem auf $\tilde{u}(\alpha, \beta)$:

$$\tilde{u}(\alpha, \beta) = u(\Lambda^{-1}(\alpha, \beta)) = u(x(\alpha, \beta), t(\alpha, \beta))$$

Die Kurve $C_{(x_0, t_0)}^{(1)}$ hat die Parameterdarstellung $\alpha \rightarrow (x(\alpha, \beta_0), t(\alpha, \beta_0))$, als charakteristische Kurve die Darstellung

$$\frac{dx}{d\tau} = -\lambda_1(x, \tau), \quad \frac{dt}{d\tau} = 1;$$

Daher existiert zwischen α und τ mittels einer Parametertransformation die Beziehung $\tau = \tau(\alpha)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(\alpha, \beta_0)}{\partial \alpha} &= \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{d\alpha} = -\lambda_1(x, \tau) \frac{d\tau}{d\alpha} \\ \frac{\partial t(\alpha, \beta_0)}{\partial \alpha} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{d\alpha} = \frac{d\tau}{d\alpha} \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\frac{\partial x(\alpha, \beta_0)}{\partial \alpha} = -\lambda_1 \frac{\partial t(\alpha, \beta_0)}{\partial \alpha}$$

wobei $\lambda_1 = \lambda_1(x(\alpha, \beta_0), \tau(\alpha))$. Auf ähnliche Weise berechnet man

$$\frac{\partial x(\alpha_0, \beta)}{\partial \beta} = -\lambda_2 \frac{\partial t(\alpha_0, \beta)}{\partial \beta}$$

Somit folgt

$$(3.42) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial t}{\partial \alpha}$$

$$(3.43) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial t}{\partial \beta}$$

In den neuen Variablen ist das gegebene System sehr einfach: multiplizieren wir das Ausgangssystem mit den Linkseigenvektoren $l^{(i)}$, so ergibt sich

$$l^{(i)}(u_t - Mu_x) = l^{(i)} \cdot u_t - \lambda_i l^{(i)} \cdot u_x = l^{(i)}(u_t - \lambda_i u_x) = 0$$

Mit (3.42), (3.43) folgt daraus aber bereits

$$l^{(1)} \cdot \tilde{u}_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad l^{(2)} \cdot \tilde{u}_\beta = 0$$

DEFINITION 3.52. *Das System*

$$l^{(1)} \cdot \tilde{u}_\alpha = 0, \quad l^{(2)} \cdot \tilde{u}_\beta = 0$$

zusammen mit

$$x_\alpha = -\lambda_1 t_\alpha, \quad x_\beta = -\lambda_2 t_\beta$$

bezeichnet man als charakteristisches System von Gleichungen.

Man beachte, dass die sowohl die Eigenvektoren $l^{(i)}$ als auch die beiden Eigenwerte λ_i von der Lösung $u(x, t)$ abhängen. Insbesondere ist damit ein zweidimensionales Vektorfeld $u \rightarrow l^{(i)}(u)$ auf dem \mathbb{R}^2 definiert. Wir nehmen daher im Folgenden an, dass das Vektorfeld $l^{(i)}(u)$ ein Gradientenfeld ist, d.h. es existiert ein Potential $F^{(i)}(u)$ mit

$$(3.44) \quad \nabla_u F^{(i)}(u) = l^{(i)}(u)$$

BEMERKUNG 3.53. *Sind die Linkseigenvektoren $l^{(i)}(u)$ nicht direkt Gradientenfelder, so kann man auch einen integrierenden Faktor $\Psi^{(i)}(u)$ suchen, sodass der modifizierte neue Linkseigenvektor $\Psi^{(i)}(u)l^{(i)}(u)$ ein Gradientenfeld ist.*

Nehmen wir an, dass die Beziehung (3.44) gilt, so ist das Kurvenintegral über das Vektorfeld $l^{(i)}(u)$ wegunabhängig, d.h. für eine beliebige (glatte) Kurve $C_{(u_0, u)}$, die die beiden Punkte u_0 und u verbindet gilt

$$\int_{C_{(u_0, u)}} l^{(i)} \cdot du = F^{(i)}(u) - F^{(i)}(u_0)$$

Halten wir den Punkt u_0 mit $F^{(i)}(u_0) = 0$ fest, so erhält man

$$\int_{C_{(u_0, u)}} l^{(i)} \cdot du = F^{(i)}(u)$$

Da die Lösung u eine Funktion von (x, t) , ist auch das Potential $F^{(i)}(u)$ ein Potential auf dem (x, t) -Raum. Wir wollen daher berechnen, wie sich das Potential entlang einer charakteristischen Kurve $C_{(x_0, t_0)}^{(i)}$. Die Berechnung ist einfacher, wenn wir die Koordinaten (α, β) verwenden. Definiert man

$$G(\alpha, \beta_0) := F^{(1)}(u(x(\alpha, \beta_0), t(\alpha, \beta_0))) = F^{(1)}(\tilde{u}(\alpha, \beta_0))$$

so beschreibt $G(\alpha, \beta_0)$ das Verhalten von $F^{(1)}$ entlang der Kurve $C^{(1)}$ und es gilt

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{\partial F^{(1)}(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}_1} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial F^{(1)}(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}_2} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \alpha} = l^{(1)}(\tilde{u}) \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} = 0$$

Damit ist $G(\alpha, \beta_0)$ unabhängig von α , d.h. wir setzen $r(\beta_0) := G(\alpha, \beta_0)$. Auf die gleiche Weise berechnet man, dass $H(\alpha_0, \beta) := F^{(2)}(\tilde{u}(\alpha_0, \beta))$ unabhängig von β ist, d.h. wir setzen $s(\alpha_0) = H(\alpha_0, \beta)$. Dies ergibt schließlich folgende allgemeine Definition der Riemann-Invarianten

DEFINITION 3.54. *Besitzt der Linkseigenvektor $l^{(i)}(U)$ das Potential $F^{(i)}(U)$, dann ist die Funktion $(x, t) \rightarrow F^{(1)}(u(x, t))$ konstant entlang den Kurven $C_{\beta_0}^{(1)}$ und hängen nur vom Parameter β_0 der Kurve ab. Das Gleiche gilt für $F^{(2)}$ entlang der Kurven $C_{\alpha_0}^{(2)}$ mit Parameter α_0 .*

Die beiden Funktionen $\beta \rightarrow r(\beta)$ and $\alpha \rightarrow s(\alpha)$ definiert durch

$$r(\beta_0) = F^{(1)}(U(t, x))|_{C_{\beta_0}^{(1)}} \quad \text{und} \quad s(\alpha_0) = F^{(2)}(U(t, x))|_{C_{\alpha_0}^{(2)}}$$

nennt man die Riemann–Invarianten des Systems.

Um das Konzept der Riemann–Invarianten zur Berechnung einer Lösung anwenden zu können, müssen wir das Problem bewältigen, das charakteristische System zu lösen, ohne die exakte Lösung u zu kennen. Dies kann folgendermaßen gemacht werden: aus der Gleichung $l^{(1)} \cdot \tilde{u}_\alpha = 0$ erhalten wir die Beziehung

$$l_1^{(1)} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \alpha} = -l_2^{(1)} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \alpha}$$

Dies ist eine Gleichung für die Funktion $\alpha \rightarrow \tilde{u}(\alpha, \beta_0)$, d.h. eine Gleichung für das Verhalten der Lösung entlang der Kurve $C_{\beta_0}^{(1)}$, sodass wir eine Kurve im u -Raum (der sogenannten hodographischen Ebene) interpretieren können. Die Tangentialvektoren an diese Kurve \tilde{u}_α sind gerade die Vektoren, die senkrecht zu den Eingenvektoren $l^{(1)}$ sind.

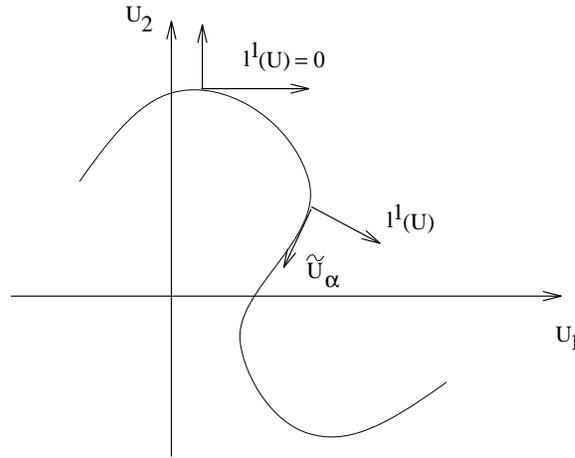


Bild 3.9: Die Kurven $\alpha \rightarrow \tilde{U}(\alpha, \beta)$, entlang derer $F^{(1)}$ konstant ist.

Für $l_1^{(1)} \neq 0$ erhalten wir die Beziehung

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{u}_2} = -\frac{l_2^{(1)}}{l_1^{(1)}}$$

sodass sich die Kurve auch in der Form

$$\tilde{u}_1 = \Phi^{(1)}(\tilde{u}_2)$$

darstellen läßt, wobei

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{d\tilde{u}_2} = \frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{U}_2} = -\frac{l_2^{(1)}(\tilde{u})}{l_1^{(1)}(\tilde{u})} = \zeta^{(1)}(\tilde{u})$$

und $\tilde{u} = \tilde{u}(\alpha, \beta_0)$. Auf ähnliche Weise erhält man für $\tilde{u} = \tilde{u}(\alpha_0, \beta)$ die Gleichung

$$\frac{d\Phi^{(2)}}{d\tilde{u}_2} = -\frac{l_2^{(2)}(\tilde{u})}{l_1^{(2)}(\tilde{u})} = \zeta^{(2)}(\tilde{u})$$

Damit erhalten wir folgendes Prinzip die Lösung mit Hilfe von Riemann–Invarianten zu berechnen:

- 1) Man berechnet die Eigenwerte $\lambda_1(u)$, $\lambda_2(u)$ und die zugehörigen Linkseigenvektoren $l^{(1)}$ and $l^{(2)}$, sodass die Eigenvektoren Gradientenfelder sind.
- 2) Berechne die Funktion $\zeta^{(i)}$ wie folgt: $l^{(i)}$ sind Linkseigenvektoren der Matrix $M(u)$, d.h.

$$\begin{aligned} l_1^{(i)}(m_{11} - \lambda_i) + l_2^{(i)}m_{21} &= 0 \\ l_1^{(i)}m_{12} + l_2^{(i)}(m_{22} - \lambda_i) &= 0 \end{aligned}$$

Ist $m_{21} \neq 0$, so erhalten wir

$$\zeta^{(i)} = -\frac{l_2^{(i)}}{l_1^{(i)}} = \frac{m_{11} - \lambda_i}{m_{21}}$$

ist $(m_{22} - \lambda_i) \neq 0$, so gilt

$$\zeta^{(i)} = \frac{m_{12}}{m_{22} - \lambda_i}$$

- 3) Berechne die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(3.45) \quad \frac{du_1}{du_2} = \zeta^{(i)}(u_1, u_2)$$

Damit erhalten wir zwei Familien von Kurven, die folgendermaßen parametrisiert werden

$$\alpha \rightarrow \tilde{u}(\alpha, \beta)$$

als Lösung von (3.45) mit rechter Seite $\zeta^{(1)}(u_1, u_2)$ und

$$\beta \rightarrow \tilde{u}(\alpha, \beta)$$

mit rechter Seite $\zeta^{(2)}(u_1, u_2)$.

- 4) Mit Hilfe des charakteristischen Systems

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\tilde{\lambda}_1(\alpha, \beta) \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\tilde{\lambda}_2(\alpha, \beta) \frac{\partial t}{\partial \beta}$$

kommen wir vom (α, β) –Raum zurück in den (x, t) –Raum.

- 5) Schließlich invertieren wir die Abbildung $(\alpha, \beta) \rightarrow (x(\alpha, \beta), t(\alpha, \beta))$ und erhalten die inverse Abbildung

$$(3.46) \quad (\alpha, \beta) = \Lambda(x, t)$$

Den Ausdruck (3.46) setzen wir in die Lösung $\tilde{u}(\alpha, \beta)$ ein und erhalten

$$u(x, t) = \tilde{u}(\Lambda(x, t))$$

BEISPIEL 3.55. *Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$u_1(x, 0) = 1, \quad u_2(x, 0) = \sin x$$

Die Eigenwerte der zugehörigen Matrix sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, die (nicht normierten) Linkseigenvektoren lauten $l^{(1)} = (1, -1)$ und $l^{(2)} = (1, 1)$. Die beiden Vektoren sind Gradientenfelder zu den Potentialen

$$F^{(1)}(u) = u_1 - u_2 \quad F^{(2)}(u) = u_1 + u_2$$

Damit sind $F^{(1)}$ and $F^{(2)}$ die Riemann Invarianten, die entlang der charakteristischen Kurven

$$(3.47) \quad \frac{dx^{(1)}}{dt} = -\lambda_1 = -1, \quad \frac{dx^{(2)}}{dt} = -\lambda_2 = 1$$

konstant bleiben. Aus (3.47) berechnet man

$$x^{(1)}(t) = x_0 - t, \quad x^{(2)}(t) = x_0 + t$$

Aus der Anfangsbedingung erhalten wir

$$u_1(0, x) - u_2(0, x) = 1 - \sin x, \quad u_1(0, x) + u_2(0, x) = 1 + \sin x$$

und aus den Riemann Invarianten

$$u_1(t, x) - u_2(t, x) = 1 - \sin(x + t), \quad u_1(t, x) + u_2(t, x) = 1 + \sin(x - t)$$

Damit lautet die Lösung des Systems

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin(x - t) - \sin(x + t)), \quad u_2(t, x) = \frac{1}{2}(\sin(x + t) + \sin(x - t))$$

BEISPIEL 3.56. Wir betrachten die eindimensionalen, isentropen Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + \frac{a^2}{\rho} \rho_x &= 0 \end{aligned}$$

mit der Zustandsgleichung $a = a(\rho)$.

Die Eigenwerte von M sind gegeben durch

$$\lambda_1 = -u + a, \quad \lambda_2 = -u - a$$

Die Eigenvektoren $l^{(1)} = (1, -\rho/a)$ und $l^{(2)} = (1, \rho/a)$ sind keine Gradientenfelder, da

$$\frac{\partial l_1^{(i)}}{\partial u} = 0 \neq \frac{\partial l_2^{(i)}}{\partial \rho}$$

Man findet aber einen integrierenden Faktor $a(\rho)/\rho$, sodass

$$l^{(1)} = \left(\frac{a(\rho)}{\rho}, -1 \right), \quad l^{(2)} = \left(\frac{a(\rho)}{\rho}, 1 \right)$$

Dann gilt

$$F^{(i)}(\rho, u) = \int_{(u_0, u)} \left(\frac{a(\rho)}{\rho} d\rho \mp 1 du \right) = \int \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho \mp u$$

Dies sind gerade die Riemann-Invarianten, die auf den Kurven $C^{(1)}$ beziehungsweise $C^{(2)}$ konstant sind.