KAPITEL 2

Fundamentale lineare partielle Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden wir uns mit vier fundamentalen partiellen Differentialgleichungen beschäftigen:

die Transportgleichung	$u_t + b \cdot \nabla u = 0$
die Laplacegleichung	$\Delta u = 0$
die Wärmeleitungsgleichung	$u_t = \Delta u$
die Wellengleichung	$u_{tt} = \Delta u$

Alle diese vier Gleichungen sind lineare Gleichungen, d.h. sind u und v zwei Lösungen der Gleichung, so ist auch die Summe $u+v$ formal eine Lösung. Formal bedeutet hier, dass wir die Randbedingungen, die zusätzlich vorgegeben sind, für einen Moment vernachlässigen. Allen vier Gleichungen gemein ist, dass explizite Lösungsdarstellungen angeben werden können. Man beachte aber, dass diese nicht dem in einem Problem vorgegebenen Randbedingungen entsprechen werden. Diese Lösungsdarstellungen wollen wir im Folgenden genauer angeben und ebenfalls Unterschiede zwischen den vier Gleichungen ausarbeiten.

1. Die Transportgleichung

Die wohl einfachste partielle Differentialgleichung ist gegeben durch

$$u_t + b \cdot \nabla u = 0 \tag{2.1}$$

in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, wobei b ein vorgegebener Vektor im $\mathbb{R}^n$ ist, den wir in der Form $b = (b_1, \ldots, b_n)$ schreiben.
Wollen wir eine glatte Lösung der Gleichung (2.1) bestimmen, so können wir die einfache Struktur der Gleichung verwenden und direkt eine allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.2}$$

angeben: man berechnet direkt, dass

$$u(x,t) = g(x - tb) \tag{2.3}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ eine Lösung ist. Die Darstellung (2.3) liefert offensichtlich eine Lösung in C^1, falls g differenzierbar ist. Auf der anderen Seite ist die Lösung nach (2.3) sicher keine C^1–Lösung, wenn g keine C^1–Funktion ist. Wir werden aber später sehen, dass wir auch in diesem Fall die Lösung $u(x,t) = g(x - tb)$ als eine Lösung der Transportgleichung (2.2) bezeichnen können, allerdings als eine sogenannte schwache Lösung. Wir kommen auf den Begriff der schwachen Lösung zurück, wenn wir nichtlineare Erhaltungsgleichungen in

Abschnitt 3.2 betrachten werden.
Beim zugehörigen inhomogenen Problem ist die Berechnung einer Lösung ähnlich einfach wie oben: wir betrachten das inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.4}$$

Hier sei die rechte Seite f in der Transportgleichung eine vorgegebene Funktion. Wir setzen nun die Funktion $z(s)$ als

$$z(s) = u(x + sb, t + s)$$

und berechnen die Ableitung von $z(s)$ nach s:

$$\dot{z}(s) = \nabla u(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s)$$

Ist nun u eine Lösung des inhomogenen Problems, so folgt

$$\dot{z}(s) = f(x + sb, t + s)$$

Weiterhin gilt

$$z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} \dot{z}(s)ds = \int_{-t}^{0} f(x + sb, t + s)ds = \int_{0}^{t} f(x + (s - t)b, s)ds$$

und damit

$$u(x,t) - g(x - tb) = z(0) - z(-t) = \int_{0}^{t} f(x + (s - t)b, s)ds$$

Also löst die Funktion

$$u(x,t) = g(x - tb) + \int_{0}^{t} f(x + (s - t)b, s)ds$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ das vorgegebene inhomogene Anfangswertproblem.
Zur Lösungsdarstellung des homogenen und inhomogenen Anfansgwertproblems bei der Transportgleichung haben wir verwendet, dass wir die vorgegebene partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung transformieren können. Das Verfahren, das wir dabei verwendet haben, ist ein Spezialfall zur Methode der Charakteristiken, die wir später genauer untersuchen werden.

2. Die Laplacegleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann suchen wir bei der Laplacegleichung eine Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $u = u(x)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = 0 \tag{2.5}$$

Neben der Laplacegleichung ist die Poissongleichung:

$$-\Delta u = f \tag{2.6}$$

eine fundamentale partielle Differentialgleichung. In (2.6) ist die rechte Seite f eine vorgebene Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definition 2.1. *Eine C^2–Funktion u, die die Laplacegleichung (2.5) erfüllt, nennt man* harmonische Funktion.

2.1. Die Fundamentallösung. Wir wollen zunächst eine explizite Lösung der Laplacegleichung berechnen, die die Grundlage für weitere kompliziertere Lösungsdarstellungen sein wird. Dabei verwenden wir eine spezielle Eigenschaft des Laplace–Operators, nämlich die Invarianz gegenüber Rotationen, d.h. wir versuchen radiale Lösungen zu bestimmen,

$$u(x) = v(r),$$

wobei $r = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.
Man berechnet direkt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2}\, 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0)$$

und damit

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r},\; u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

für $i = 1, \dots, n$. Daraus folgt

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)$$

und aus $\Delta u = 0$ erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0$$

Für $v' \neq 0$ berechnen wir

$$\log(v')' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}$$

und somit $v'(r) = \alpha / r^{n-1}$ mit einer Konstanten α. Diese Gleichung können wir integrieren und bekommen damit eine Darstellung für $v(r)$ in der Form

$$v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & (n = 2) \\ \dfrac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$$

wobei b und c Konstanten sind. Die so gefundene Lösung bezeichnen wir als Fundamentallösung

Definition 2.2. *Die Funktion*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log |x| & (n = 2) \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} |x|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases} \tag{2.7}$$

definiert für $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, ist die Fundamentallösung der Laplacegleichung. *Die Konstante $\alpha(n)$ bezeichnet dabei das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.*

Für die Fundamentallösung gelten die folgenden Abschätzungen

$$|D\Phi(x)| \le \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2\Phi(x)| \le \frac{C}{|x|^n} \quad (x \ne 0) \tag{2.8}$$

mit einer Konstanten $C > 0$.
Mit Hilfe der Fundamentallösung kann man auch eine explizite Lösung der Poissongleichung angeben:

Satz 2.3. *Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. zweimal stetig differenzierbar und mit kompakten Träger, und $\Phi(x)$ die Fundamentallösung der Laplacegleichung. Definiert man die Funktion $u(x)$ als das Faltungsintegral*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy \tag{2.9}$$

so gilt

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

und

$$-\Delta u = f$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)dy$$

und daher

$$\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\left[\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h}\right]dy,$$

wobei $h \ne 0$ und e_i den i-te Einheitsvektor bezeichnet. Es gilt aber

$$\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$$

für $h \to 0$ gleichmässig auf $\mathbb{R}^n$ und daher

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)dy \quad (i = 1, \dots, n).$$

Analog folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)dy \quad (i, j = 1, \dots, n). \tag{2.10}$$

und da die rechte Seite von (2.10) eine stetige Funktion in der Variablen x ist, folgt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.
Da Φ eine Singularität an der Stelle $x = 0$ besitzt, müssen wir für die folgenden Rechnungen

das Integral über $\mathbb{R}^n$ aufspalten: sei $\varepsilon > 0$ fest und $B(0,\varepsilon)$ die Kugel um $x = 0$ mit Radius ε. Dann schreiben wir

$$\begin{aligned}\Delta u &= \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy \\ &=: I_\varepsilon + J_\varepsilon\end{aligned}$$

Für I_ε haben wir die Abschätzung

$$|I_\varepsilon| \leq \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dy \leq \begin{cases} C\varepsilon^2(|\log\varepsilon| + \frac{1}{2}) & (n=2) \\ C\varepsilon^2 & (n=3)\end{cases} \tag{2.11}$$

was man durch Transformation auf sphärische Koordinaten und anschließende Integration entlang der radialen Richtung berechnet. Für den zweiten Term J_ε verwenden wir partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned}J_\varepsilon &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_y f(x-y)dy \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} D\Phi(y)\cdot D_y f(x-y)dy \\ &\quad + \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial\nu}(x-y)dS(y) \\ &=: K_\varepsilon + L_\varepsilon\end{aligned}$$

wobei ν die innere Normale am Rand $\partial B(0,\varepsilon)$ bezeichnet. Für den Ausdruck L_ε zeigt man direkt die Abschätzung

$$|L_\varepsilon| \leq \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n} \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dS(y) \leq \begin{cases} C\varepsilon|\log\varepsilon| & (n=2) \\ C\varepsilon & (n=3)\end{cases} \tag{2.12}$$

Für den Term K_ε verwenden wir wieder partielle Integration:

$$\begin{aligned}K_\varepsilon &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \Delta\Phi(y)f(x-y)dy - \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)dS(y) \\ &= -\int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)f(x-y)dS(y),\end{aligned}$$

da die Fundamentallösung $\Phi(y)$ ausserhalb des Ursprungs harmonisch ist. Es gilt

$$\begin{aligned}D\Phi(y) &= -\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{y}{|y|^n} \quad (y \neq 0) \\ \nu &= -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} \quad (y \in \partial B(0,\varepsilon))\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \nu \cdot D\Phi(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \quad (y \in \partial B(0,\varepsilon))$$

Da der Ausdruck $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$ gerade die Oberfläche der Sphäre $\partial B(0,\varepsilon)$ ist (siehe Übungsblatt 2), erhalten wir

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)dS(y) \\ &= -\fint_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)dS(y) \to -f(x) \quad \text{für } \varepsilon \to 0 \end{aligned}$$

wobei $\fint$ das Integralmittel bezeichnet, d.h.

$$\begin{aligned} \fint_{B(x,r)} f(y)dy &= \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int\limits_{B(x,r)} fdy \\ \fint_{\partial B(x,r)} f(y)dS(y) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} fdS(y) \end{aligned}$$

Im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ erhalten wir also durch Kombination der obigen Resultate das gewünschte Ergebnis $-\Delta u = f$. □

Bemerkung 2.4. *Für die Fundamentallösung schreibt man auch*

$$-\Delta\Phi = \delta_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

wobei δ_0 die Dirac'sche Deltafunktion auf $\mathbb{R}^n$ im Punkt $x = 0$ darstellt. Damit lässt sich formal das Ergebnis des obigen Satzes berechnen:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} -\Delta_x \Phi(x-y) f(y)dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta_x f(y)dy = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Weiterhin gilt die Aussage des Satzes auch bei weniger strikten Bedingungen an die rechte Seite f.

2.2. Mittelwertformeln.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

Satz 2.5. *Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, dann gilt*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} udS = \fint_{B(x,r)} udy \tag{2.13}$$

für jede Kugel $B(x,r) \subset U$.

Beweis. Wir definieren die Funktion $\phi(r)$ durch

$$\phi(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz)dS(z)$$

Dann gilt

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(x+rz)dS(z)$$

und mit Hilfe der Greenschen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \fint_{\partial B(x,r)} Du(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\
&= \fint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y) \\
&= \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y) dy
\end{aligned}$$

Damit ist ϕ konstant und es gilt

$$\phi(r) = \lim_{t \to 0} \phi(t) = \lim_{t \to 0} \fint_{\partial B(x,t)} u(y)dS(y) = u(x)$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(x,r)} u dy &= \int\limits_0^r \left(\int\limits_{\partial B(x,s)} u dS \right) ds \\
&= u(x) \int\limits_0^r n\alpha(n) s^{n-1} ds = \alpha(n) r^n u(x)
\end{aligned}$$

□

Es gilt auch folgende Umkehrung:

Satz 2.6. *Für die Funktion $u \in C^2(U)$ gelte*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u dS$$

für jede Kugel $B(x,r) \subset U$, dann ist u harmonisch.

Beweis. Ist $\Delta u \neq 0$, so existiert eine Kugel $B(x,r) \subset U$, sodass $\Delta u > 0$ innerhalb von $B(x,r)$ gilt. Wir wissen aber, dass

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y) dy > 0$$

was zu einem Widerspruch führt. Also ist u harmonisch. □

2.3. Eigenschaften harmonischer Funktionen. Wir fassen im Folgenden einige wichtige Eigenschaften harmonischer Funktionen zusammen, die alle aus den Mittelwertformeln abgeleitet werden. Dabei sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.
Zunächst gilt bei harmonischen Funktionen das starke Maximumprinzip:

Satz 2.7. *Sei $u \in C^2(U) \cup C(\overline{U})$ harmonisch in U. Dann gilt:*

1)
$$\max_{x\in\overline{U}} u(x) = \max_{x\in\partial U} u(x)$$

2) *Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $x_0 \in U$ mit*
$$u(x_0) = \max_{x\in\overline{U}} u(x)$$
so folgt, dass u auf U konstant ist.

Die erste Aussage des Satzes bezeichnet das Maximumprinzip, die zweite das starke Maximumsprinzip der Laplacegleichung. Analoge Aussagen gelten natürlich für das Minimum von u.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Aussage 1) eine direkte Konsequenz aus dem starken Maximumprinzip ist. Es genügt also dieses zu beweisen. Sei dazu $x_0 \in U$ mit $u(x_0) = M := \max_{x\in\overline{U}} u(x)$. Dann gilt für $0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$ nach den Mittelwertformeln
$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u dy \le M$$
Da Gleichheit nur für $u = M$ auf ganz $B(x_0, r)$ gilt, folgt, dass $u(x) = M$ für alle $x \in B(x_0, r)$. Damit folgt, dass die Menge $\{x \in U \ : \ u(x) = M\}$ relativ offen in U ist. Da aber u eine stetige Funktion ist, ist die Menge auch relativ abgeschlossen in U ist und damit ist die Menge $\{x \in U \,|\, u(x) = M\}$ gleich U. □

Eine direkte Konsequenz des Maximumsprinzips ist die Eindeutigkeit von Lösungen der Poissongleichung:

Satz 2.8. *Sei $g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ des Randwertproblems*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f & \text{in } U \\ u &=& g & \text{auf } \partial U \end{array} \right. \tag{2.14}$$

Beweis. Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen von (2.14). Dann folgt die Aussage des Satzes aus der Anwendung des Maximumsprinzips für die Funktionen $w = \pm(u_1 - u_2)$. □

Wir zeigen nun, dass jede harmonische Funktion gleichzeitig unendlich oft differenzierbar ist, obwohl in der Laplacegleichung nur Ableitungen zweiter Ordnungen auftauchen:

Satz 2.9. *Erfüllt die Funktion $u \in C(U)$ die Mittelwerteigenschaft (2.13) für jede Kugel $B(x, r) \subset U$, dann gilt bereits $u \in C^\infty(U)$.*

Für den Beweis den Beweis des Satzes benötigen wir das Konzept von Glättungsfunktionen, d.h. nichtnegativen Funktionen η aus $C_0^\infty(B(0,1))$: wir definieren die Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\eta(x) := \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

wobei die Konstante so gewählt ist, dass $\|\eta\|_{L^1} = 1$. Weiterhin setzen wir für alle $\varepsilon > 0$

$$\eta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Ist nun die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, dann bezeichnet die Glättung von f das Faltungsintegral

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon \star f$$

definiert auf $U_\varepsilon := \{x \in U \ : \ \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$, d.h.

$$f^\varepsilon(x) = \int\limits_U \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

für $x \in U_\varepsilon$. Die Glättung von f hat dann folgende Eigenschaften

1) $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$,
2) $f^\varepsilon \to f$ f.ü. für $\varepsilon \to 0.$,
3) Ist $f \in C(U)$, dann gilt $f^\varepsilon \to f$ gleichmässig auf kompakten Teilmengen von U,
4) Ist $1 < p < \infty$ und $f \in L^p_{loc}(U)$, dann gilt $f^\varepsilon \to f$ in $L^p_{loc}(U)$.

Beweis. (des Satzes 2.9)
Wir zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt: u ist auf U_ε identisch mit $u_\varepsilon \in C^\infty$.

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \int\limits_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} udS\right)dr \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}u(x)\int\limits_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)n\alpha(n)r^{n-1}dr \\ &= u(x)\int\limits_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon dy = u(x) \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe der Mittelwertformeln lassen sich die folgenden Abschätzungen für die partiellen Ableitungen von harmonischen Funktionen angeben:

SATZ 2.10. *Die Funktion u sei harmonisch in U. Dann gilt*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \tag{2.15}$$

für jede Kugel $B(x,r) \subset U$ und jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k$. Die Konstanten C_k sind dabei gegeben durch

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)} \quad (k = 1, \dots) \tag{2.16}$$

BEWEIS. siehe Anhang □

Der Satz von Liouville besagt:

SATZ 2.11. *Die Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei harmonisch und beschränkt. Dann folgt bereits, dass u auf ganz $\mathbb{R}^n$ konstant ist.*

BEWEIS. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Dann gilt auf $B(x_0, r)$

$$\begin{aligned} |Du(x_0)| &\leq \frac{C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\ &\leq \frac{C_1 \alpha(n)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad (r \to \infty) \end{aligned}$$

Also folgt $Du \equiv 0$ und damit ist u konstant. □

SATZ 2.12. *Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f \quad$ in $\mathbb{R}^n$ die Form*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy + C$$

mit einer Konstanten C.

BEWEIS. Da im Fall $n \geq 3$ die Beziehung $\Phi(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$ gilt, ist $\tilde{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy$ eine beschränkte Lösung der Poissongleichung. Ist u eine weitere Lösung, so ist $w = u - \tilde{u}$ nach dem Satz von Liouville eine konstante Funktion. □

BEMERKUNG 2.13. *Für $n = 2$ ist die Fundamentallösung für $|x| \to \infty$ unbeschränkt und damit gegebenfalls auch das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy$.*

SATZ 2.14. *Sei u harmonisch in U. Dann ist u analytisch in U.*

BEWEIS. siehe Anhang □

Wir bezeichnen mit $V \subset\subset U$ die Eigenschaft $V \subset \overline{V} \subset U$, wobei $\overline{V}$ kompakt ist. Dann lautet die Harnacksche Ungleichung:

SATZ 2.15. *Für jede zusammenhängende offene Menge $V \subset\subset U$ existiert eine positive Konstante C, sodass*

$$\sup_V u \leq C \inf_V u$$

für alle nichtnegativen harmonischen Funktionen u in U.

Damit gilt

$$u(x) \leq \sup_V \leq C \inf_V u \leq Cu(y) \quad (x, y \in V)$$

und die Abschätzung

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y)$$

für alle $x, y \in V$. Dies besagt, dass die Funktionswerte einer nichtnegativen harmonischen Funktion nicht zu weit auseinanderliegen.

Beweis. (des Satzes 2.15)
Sei $r := \frac{1}{4}\mathrm{dist}(V, \partial U)$ und wähle zwei Punkte $x, y \in V$ mit $|x - y| \leq r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u(x) &= \fint_{B(x,2r)} udz \geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(y,r)} udz \\ &= \frac{1}{2^n} \fint_{B(y,r)} udz = \frac{1}{2^n}u(y) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Beziehung $2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n}u(y)$, falls $x, y \in V, |x - y| \leq r$.
Da V zusammenhängend ist und gleichzeitig $\overline{V}$ kompakt, existiert eine endliche Überdeckung von $\overline{V}$ durch eine Kette von Kugeln $\{B_i\}_{i=1}^N$ mit Radius r und $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$, $i = 2, \ldots, N$. Dann gilt

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}}u(y)$$

für alle $x, y \in V$. □

2.4. Die Greensche Funktion. Bis jetzt haben wir nur Lösungsdarstellungen auf ganz $\mathbb{R}^n$ angeben, ohne Berücksichtigung von Randbedingungen. Im Folgenden suchen wir eine Lösungsdarstellung für das folgende Dirichlet–Problem der Poissongleichung: sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit glattem Rand $\partial U \in C^1$. Dann betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases} \tag{2.17}$$

Bemerkung 2.16. *Neben dem oben angegebenen Dirichlet–Problem betrachtet man für die Laplace– oder Poissongleichung auch folgendes* Neumann–Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

wobei n die äußere Normale an ∂U bezeichnet.

Für die Lösung von (2.17) suchen wir eine Integraldarstellung in der Form

$$u(x) = -\int_{\partial U} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)dS + \int_U f(y)G(x, y)dy \quad (x \in U) \tag{2.18}$$

Die in Formel (2.18) verwendete Funktion $G(x, y)$ ist die sogenannte Greensche Funktion, die wir im Folgenden (zusammen mit der Darstellung (2.18)) herleiten wollen: sei zunächst $u \in C^2(\overline{U})$ eine beliebige Funktion. Für $x \in U$ fest sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $B(x, \varepsilon) \subset U$, setze $V_\varepsilon := U \setminus B(x,\varepsilon)$. Wir wenden nun die dritte Greensche Formel auf die Funktionen $u(y)$ und die Fundamentallösung $\Phi(y-x)$ an:

$$\int_{V_\varepsilon} u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y)dy = \int_{\partial V_\varepsilon} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)dS(y) \tag{2.19}$$

wobei ν wieder den äußeren Einheitsnormalenvektor an den Rand ∂V_ε bezeichnet. Das Integral auf der rechten Seiten lässt sich schreiben als

$$\int_{\partial V_\varepsilon} u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \Phi\frac{\partial u}{\partial\nu}dS = \int_{\partial U} u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \Phi\frac{\partial u}{\partial\nu}dS + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \Phi\frac{\partial u}{\partial\nu}dS \tag{2.20}$$

Für die Randintegrale über $\partial B(x,\varepsilon)$ gelten analog zum Beweis von Satz 2.3 die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)dS(y)\right| &\leq C\varepsilon^{n-1}\max_{x\in\partial B(0,\varepsilon)}|\Phi(x)| = o(1)\\
\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)dS(y)\right| &= ⨍_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)dS(y) \to u(x)
\end{aligned}$$

für $\varepsilon \to 0$. Weiterhin ist $\Phi(y-x)$ für $x \neq y$ harmonisch. Also folgt aus (2.21) im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ die Beziehung

$$u(x) = \int_{\partial U} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)dS(y) - \int_U \Phi(y-x)\Delta u(y)dy \tag{2.21}$$

die für jeden Punkt $x \in U$ und jede beliebige Funktion $u \in C^2(\overline{U})$ gültig ist. Wir können also jeden Funktionswert $u(x)$ bestimmen, sofern wir die Werte von Δu in U, sowie u und $\partial u/\partial\nu$ entlang des Randes ∂U kennen. Wenden wir die Darstellung auf das Dirichlet–Problem der Poissongleichung an, so sehen wir, dass uns gerade die Randwerte $\partial u/\partial\nu$ fehlen, um (2.21) anzuwenden. Für das Neumann–Problem fehlen uns dementsprechend gerade die Randdaten u.

Unser Ziel wird es jetzt sein, die Formel (2.21) so zu modifizieren, dass wir den uns unbekannten Term eliminieren können: sei dazu $\Phi^x = \Phi^x(y)$ eine sogenannte Korrekturfunktion, die das Randwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta\Phi^x &=& 0 & \text{in } U\\ \Phi^x &=& \Phi(y-x) & \text{auf } \partial U \end{array}\right. \tag{2.22}$$

löst. Wir berechnen wieder mit Hilfe der Greenschen Formel

$$-\int_U \Phi^x(y)\Delta u(y)dy = \int_{\partial U} u(y)\frac{\partial \Phi^x}{\partial \nu}(y) - \Phi^x(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS(y) = \int_{\partial U} u(y)\frac{\partial \Phi^x}{\partial \nu}(y) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS(y) \tag{2.23}$$

Definieren wir nun

Definition 2.17. *Die Greensche Funktion für das Gebiet U ist*

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi^x(y) \quad (x, y \in U, x \neq y)$$

so lässt sich (2.21) mit Hilfe der Greenschen Funktion folgendermaßen umschreiben:

$$u(x) = -\int_{\partial U} u(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS(y) - \int_U G(x,y)\Delta u(y)dy \quad (x \in U) \tag{2.24}$$

wobei

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = D_y G(x,y) \cdot \nu(y)$$

die Richtungsableitung von G bezüglich y in Richtung der äußeren Normalen ν ist. Wir bemerken, dass insbesondere die Normalenableitung $\partial u/\partial \nu$ von u nicht in der Darstellung (2.24) auftaucht, also gerade der Term, den wir in der Lösungsdarstellung (2.21) aus dem Dirchlet–Problem der Poissongleichung nicht kennen. In der Tat haben wir die Korrekturfunktion Φ^x gerade deswegen eingeführt, um diesen Term zu eliminieren.
Insgesamt erhalten wir also folgenden Satz zur Lösungen des Randwertproblems (2.17):

Satz 2.18. *Sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Randwertproblems (2.17). Dann löst sich u in der Form*

$$u(x) = -\int_{\partial U} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS(y) + \int_U f(y)G(x,y)dy \quad (x \in U) \tag{2.25}$$

darstellen.

Die Formel (2.25) liefert uns also für jedes Dirchlet–Problem eine Lösungsdarstellung. Um die Lösung zu berechnen, benötigen wir allerdings die Greensche Funktion, d.h. wir müssen die Lösung des zugehörigen Randwertproblems (2.22) kennen. Dies ist umso komplizierter, je komplizierter die zugrundeliegende Menge U ist. Im Folgenden geben wir einige Spezialfälle zur Konstruktion der Greenschen Funktion auf beschränkten Gebieten U an.

Bemerkung 2.19. *Wir können die Greensche Funktion als Funktion der Variablen y symbolisch auch als Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} -\Delta G &= \delta_x \quad \text{in } U \\ G &= 0 \quad \text{auf } \partial U \end{aligned}$$

$x \in U$ fest, schreiben. Dabei bezeichnet δ_x wiederum die Diracsche Deltafunktion am Punkt $x \in U$.

Bevor wir die Greensche Funktion für einige speziellen Gebiete U angeben, fassen wir kurz die wesentlichen Eigenschaften der Greenschen Funktion zusammen:

1) die Greensche Funktion $G(x,y)$ ist bis auf den Punkt $y=x$ harmonisch in y,
2) $G(x,y)$ erfüllt homogene Randbedingungen, d.h. $G(x,y)=0$ für alle $y \in \partial U$ und $x \in U$,
3) die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmt,
4) $G(x,y)$ ist symmetrisch, d.h. $G(x,y)=G(y,x)$,

Wir wollen nun für zwei Spezialfälle die Greensche Funktion angeben:

1) für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+ = \{x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0\}$
2) für die Einheitskugel $B(0,1)$.

In beiden Fällen machen wir Gebrauch von einem Reflektionsprinzip, um die Singularität der Fundamentallösung $\Phi(y-x)$ im Punkt $y=x\in U$ auf einen Punkt außerhalb von U zu verschieben und damit eine Lösung Φ^x des Randwertproblems (2.22) angeben zu können. Da der Halbraum keine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, müsen wir allerdings die Ergebnisse von oben, die ja nur für beschränkte Mengen U abgeleitet wurden, explizit nachprüfen.
Für den Halbraum

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0\}$$

betrachten wir zunächst die Reflektion an der Ebene $\partial\mathbb{R}^n_+$:

Definition 2.20. *Für einen Punkt $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+$ definieren wir die* Reflektion *an der Ebene $\partial\mathbb{R}^n_+$ mittels*

$$\tilde{x} = (x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)$$

Betrachtet man nun die Funktion

$$\Phi^x(y) := \Phi(y-\tilde{x}) = \Phi(y_1-x_1,\dots,y_{n-1}-x_{n-1},y_n+x_n) \quad (x,y\in\mathbb{R}^n_+)$$

so gilt offensichtlich für $y\in\partial\mathbb{R}^n_+$

$$\Phi^x(y) = \Phi(y-x)$$

da die Fundamentallösung nur von $|y-x|$ abhängig ist. Also löst $\Phi^x(y)$ das Randwertproblem (2.22) und wir erhalten

Definition 2.21. *Die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ ist gegeben durch*

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}) \quad (x,y\in\mathbb{R}^n_+, x\neq y)$$

Man berechnet

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y-x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y-\tilde{x}) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n-x_n}{|y-x|^n} - \frac{y_n+x_n}{|y-x|^n}\right]\end{aligned}$$

und damit gilt für $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) = -\frac{-2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^n}$$

Wir erwarten also, dass die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases} \tag{2.26}$$

von der Form

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dy \tag{2.27}$$

ist. Die Funktion

$$K(x,y) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^n} \quad (x \in \mathbb{R}^n_+,\, y \in \partial\mathbb{R}^n_+)$$

nennt man auch den Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$ und die Gleichung auch die Poissonsche Formel.

Satz 2.22. *Sei $g \in C(\mathbb{R}^{n-1} \cap L^\infty)\mathbb{R}^{n-1}$ und u gegeben durch (2.27). Dann gilt*

1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,
2) $\Delta u = 0$ *in* $\mathbb{R}^n_+$,
3) $u(x) \to g(x_0)$ *für* $x \to x_0, x \in \mathbb{R}^n_+$ *und jeden Punkt* $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $x \to K(x,y)$ für $x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ harmonisch ist: halten wir den Punkt x fest, so ist die Greensche Funktion $G(x,y)$ harmonisch bis auf $y = x$. Da aber $G(x,y)$ symmetrisch ist, ist auch $x \to G(x,y)$ für $x \neq y$ harmonisch. Daraus folgt aber, dass $x \to -\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) = K(x,y)$ für $x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ harmonisch ist.
Man prüft leicht nach, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$ die Beziehung

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)dy = 1 \tag{2.28}$$

gilt. Nun ist g beschränkt, also folgt aus der Darstellung (2.27), dass u ebenfalls beschränkt ist. Weiter gilt, dass $x \to K(x,y)$ für $x \neq y$ unendlich oft differenzierbar ist und damit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ mit

$$\Delta u = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta_x K(x,y)g(y)dy$$

Damit sind die beiden Teile 1) und 2) des Satzes bewiesen.
Zu Teil 3): sei $x^0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$, $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, dass gilt

$$|g(y) - g(x^0)| < \varepsilon \quad \text{falls } |y - x^0| < \delta,\, y \in \partial\mathbb{R}^n_+ \tag{2.29}$$

Dies ist möglich, da angenommen wurde, dass g eine stetige Funktion ist. Es gilt

$$|u(x) - g(x^0)| = \left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)(g(y) - g(x^0))dy \right|$$

wobei wir die Beziehung (2.28) ausgenutzt haben.
Damit folgt für $|x - x^0| < \delta/2$, $x \in \mathbb{R}^n_+$

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_0)| &\leq \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B(x^0,\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x^0)|dy \\ &\quad + \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(x^0,\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x^0)|dy \\ &=: I + J \end{aligned} \tag{2.30}$$

Aus (2.28), (2.29) folgt

$$I \leq \varepsilon \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)dy = \varepsilon$$

und demnach mit $|x - x^0| < \delta/2$ und $|y - x^0| \geq \delta$

$$|y - x^0| \leq |y - x| + |x - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|$$

Damit folgt die Abschätzung $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|$ und daher

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(x^0,\delta)} K(x,y)dy \\ &\leq \frac{2^{n+2}\|g\|_{L^\infty} x_n}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B(x^0,\delta)} |y - x^)|^{-n}dy \\ &\to 0 \quad x_n \to 0^+ \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.30) folgt damit $|u(x) - g(x^0)| \leq 2\varepsilon$ für $|x - x^0|$ hinreichend klein. □

Wir kommen nun zum unserem zweiten Beispiel, nämlich der Greenschen Funktion für die Einheitskugel $B(0,1)$: hier verwenden wir folgendes Spiegelungsprinzip

Definition 2.23. *Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, bezeichnet der Punkt*

$$\tilde{x} + \frac{x}{|x|^2}$$

den dualen Punkt *von x bezüglich $\partial B(0,1)$.*

Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x &= 0 & \text{in } B^0(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \quad |x| < 1\} \\ \Phi^x &= \Phi(y-x) & \text{auf } \partial B(0,1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^x(y) := \Phi(|x|(y - \tilde{x}))$$

und wir erhalten folgende Definition

Definition 2.24. *Die Greensche Funktion für die Einheitskugel ist gegeben durch*

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x})) \quad (x, y \in B(0,1), x \neq y)$$

Wir wollen diese Form der Greenschen Funktion für den Fall $n \geq 3$ herleiten: die Abbildung $y \to \Phi(y - \tilde{x})$ offensichtlich harmonisch für $y \neq \tilde{x}$. Also ist auch $y \to |x|^{2-n}\Phi(y-\tilde{x})$ für $y \neq \tilde{x}$ harmonisch und ebenso

$$\Phi^x(y) := \Phi(|x|(y-\tilde{x})) \quad (y \in B(0,1))$$

Gleichzeitig gilt für $y \in \partial B(0,1)$ und $x \neq 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} |x|^2|y-\tilde{x}|^2 &= |x|^2 \left(|y|^2 - \frac{2y \cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) \\ &= |x|^2 - 2y \cdot x + 1 = |x-y|^2 \end{aligned}$$

Also folgt $(|x||y-\tilde{x}|)^{-(n-2)} = |x-y|^{-(n-2)}$ und demnach

$$\Phi^x(y) = \Phi(y-x) \quad (y \in \partial B(0,1))$$

Wir können also die Lösung u des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^0(0,1) \\ u = g & \text{auf } \partial B(0,1) \end{cases} \tag{2.31}$$

in der Form

$$u(x) = -\int\limits_{\partial B(0,1)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) dS(y) \tag{2.32}$$

darstellen.
Nun gilt

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y-x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(|x|(y-\tilde{x}))$$

sowie

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}(y-x) = \frac{1}{n\alpha(n)}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n}$$

und

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}(|x|(y-\tilde{x})) = \frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{y_i|x|^2-x_i}{(|x||y-\tilde{x}|)^n} = -\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{y_i|x|^2-x_i}{|x-y|)^n}$$

für $y \in \partial B(0,1)$. Dementsprechend

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y) &= \sum_{i=1}^n y_i\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y)\\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^n}\sum_{i=1}^n y_i((y_i-x_i)-y_i|x|^2+x_i)\\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\end{aligned}$$

Damit lässt sich die Lösungsdarstellung (2.32) auch in der Form

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)}\int\limits_{\partial B(0,1)}\frac{g(y)}{|x-y|^n}dS(y)$$

schreiben.
Analoge Darstellungen gelten auch für das Problem

$$\begin{cases}\Delta u = 0 & \text{in } B^0(0,r)\\ u = g & \text{auf } \partial B(0,r)\end{cases} \tag{2.33}$$

mit $r > 0$. Dieses Problem wird mit Hilfe durch Transformation $\tilde{u}(x) = u(rx)$ auf das Ausgangsproblem (2.31) zurückgeführt. Damit ergibt sich die Poissonsche Formel

$$u(x) = \frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r}\int\limits_{\partial B(0,r)}\frac{g(y)}{|x-y|^n}dy \tag{2.34}$$

mit dem Poissonkern $K(x,y)$ für die Kugel $B(0,r)$

$$K(x,y) := \frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r}\frac{1}{|x-y|^n} \quad (x \in B^0(0,r), y \in \partial B(0,r))$$

Die Darstellung (2.34) gilt für den Fall, dass das Problem (2.33) tatsächlich eine glatte Lösung besitzt. Dies wird im folgenden Satz ausgedrückt, der analog zu Satz 2.22 bewiesen werden kann.

Satz 2.25. *Sei $g \in C(\partial B(0,r))$ und u gegeben durch (2.34). Dann gilt*

1) $u \in C^\infty(B^0(0,r))$,
2) $\Delta u = 0$ *in* $B^0(0,r)$,
3) $u(x) \to g(x_0)$ *für* $x \to x_0, x \in B^0(0,r)$ *und jeden Punkt* $x_0 \in \partial B(0,r)$.

3. Die Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt suchen wir explizite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta_x u = 0 \tag{2.35}$$

sowie der inhomogenen Gleichung

$$u_t - \Delta_x u = f \tag{2.36}$$

Hier ist die Zeit $t > 0$, die Ortsvariablen $x \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und die rechte Seite $f : U \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ in (2.36) eine vorgegebene Funktion.

3.1. Die Fundamentallösung. Wir möchten zuerst, analog zum Vorgehen bei der Laplacegleichung, eine sogenannte Fundamentallösung der Gleichung berechnen, aus der wir dann weitere Lösungsdarstellungen ableiten können. Bei der Laplacegleichung hatten wir die Rotationsinvarianz des Laplace–Operators ausgenutzt. Für die Wärmeleitungsgleichung ist die Situation etwas komplizierter, da in der Gleichung die erste Ableitung nach der Zeit, aber die zweiten Ableitungen nach den n Ortsvariablen auftauchen.
Wir suchen daher nach Lösungen, die folgende spezielle Struktur aufweisen

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \tag{2.37}$$

mit zwei Konstanten α, β, die man aus der Skalierung

$$u(x,t) \to \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$$

mit $\lambda > 0$ erhält.

Bemerkung 2.26. *Ist u eine Lösung von (2.35), so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, offensichtlich auch eine Lösung. Dies legt natürlich auch nahe eine Lösung in der speziellen Form*

$$u(x,t) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right)$$

zu suchen (siehe Übungsblatt 4)

Setzen wir $\lambda = t^{-1}$ so erwarten wir für die Funktion $v(y) := u(y,1)$, $y := t^{-\beta}x$ durch Einsetzen von (2.37) in die Gleichung (2.35) durch geschickte Wahl von α, β eine gewöhnliche Differentialgleichung für $v(y)$. In der Tat ergibt sich zunächst die Gleichung

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v = 0 \tag{2.38}$$

Setzen wir also $\beta = 1/2$ so reduziert sich (2.38) zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0$$

Nehmen wir nun an, dass v nur von der Radialkomponente abhängig ist, $v(y) = w(r)$, $r = |y|$, so ergibt sich die Gleichung

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0$$

Wir haben nun noch die Freiheit die Konstante α zu setzen: mit $\alpha = n/2$ reduziert sich die Gleichung weiter zu

$$(r^{n-1}w')' + \frac{1}{2}(r^n w)' = 0 \tag{2.39}$$

Lösen wir nun (2.39) unter Hinzunahme der Grenzbedingungen

$$\lim_{r\to\infty} w(r) = \lim_{r\to\infty} w'(r) = 0$$

so ergibt sich die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$w' = -\frac{1}{2}rw$$

mit der allgemeinen Lösung

$$w(r) = be^{-\frac{r^2}{4}} \tag{2.40}$$

Über (2.37), (2.40) sowie die Wahl der Konstanten α, β haben wir also eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in der Form $u(x,t) = \frac{b}{t^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ bestimmt.

Definition 2.27. *Die Funktion*

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Die Fundamentallösung besitzt also eine Singularität im Punkt $(0,0)$ und ist insbesondere normiert:

Lemma 2.28. *Für alle $t > 0$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)dx = 1$$

Beweis. Eine direkte Berechnung ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dx \\ &= \frac{1}{n^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}dy \\ &= \frac{1}{n^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2}dz_i = 1 \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von $\Phi(x,t)$ lässt sich für das Anfangswertproblem (oder auch Cauchy–Problem

$$\left\{\begin{array}{rl} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{array}\right. \tag{2.41}$$

eine Lösungsdarstellung wieder in der Form eines Faltungsintegral angeben:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \end{aligned} \tag{2.42}$$

Satz 2.29. *Sei $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und u definiert durch (2.42). Dann gilt*

1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,
2) $u_t = \Delta u \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$,
3) $u(x,t) \to g(x^0)$ *für* $(x,t) \to (x^0, 0)$, $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ *und jeden Punkt* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Der Beweis des Satzes läuft sehr ähnlich zu dem von Satz 2.22: Aussage 1) gilt, da die Funktion $\frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ auf $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$, $\delta > 0$ unendlich oft differenzierbar ist und gleichzeitig alle Ableitungen der Funktion gleichmäßig beschränkt sind. Weiter gilt

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} [(\Phi_t - \Delta\Phi)(x-y,t)] g(y,t) dy \\ &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \end{aligned}$$

da die Fundamentallösung selbst eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Damit ist die zweite Aussage ebenfalls klar.
Sei nun $x^0 \in \mathbb{R}^n$ fest, $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta > 0$ sodass

$$|g(y) - g(x^0)| < \varepsilon \quad \text{falls } |y - x^0| < \delta, y \in \mathbb{R}^n \tag{2.43}$$

Dann gilt für $|x - x^0| < \delta/2$

$$\begin{aligned} |u(x,t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)[g(y) - g(x^0)] dy \right| \\ &\leq \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &=: I + J \end{aligned}$$

Mit (2.43) folgt

$$I \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)dy = \varepsilon$$

Sei $|x-x^0| < \delta/2$ und $|y-x^0| \ge \delta$, dann gilt nach dem Beweis von Satz 2.22 $|y-x| \ge \frac{1}{2}|y-x^0|$ und daher

$$\begin{aligned} J &\le 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)dy \\ &\le \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\ &\le \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0,\delta)} e^{-\frac{|x-x^0|^2}{16t}} dy \\ &\le \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \to 0 \quad \text{für } t \to 0^+ \end{aligned}$$

□

Wie bei der Laplacegleichung schreiben wir die Fundamentallösung auch als Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta\Phi = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \Phi = \delta_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Ist die rechte Seite g beschränkt, stetig, $g \ge 0$, $g \ne 0$, so ist die Lösung (2.42) positiv für alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ und alle Zeiten $t > 0$. Man sagt daher auch, dass Lösungen der Wärmeleitungsgleichung eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen, d.h. kleine lokale Störungen sind instantan im ganzen Gebiet zu bemerken. Ist zum Beispiel die Anfangsbedingung überall nichtnegativ und in einigen Gebieten positiv, so ist die Lösung nach beliebiger Zeit überall positiv. Mit der Wellengleichung lernen wir in Abschnitt 2.4 eine Gleichung kennen, die eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt.
Wir suchen nun eine Lösungsdarstellung für das inhomogene Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Die Abbildung $(x,t) \to \Phi(x-y,t-s)$ ist offensichtlich für festes $y \in \mathbb{R}^n$ und $0 < s < t$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Daher löst

$$u = u(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) dy$$

folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t(\cdot\,;s) - \Delta u(\cdot\,;s) &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u(\cdot\,;s) &= f(\cdot\,;s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \end{cases}$$

Für die Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung suchen wir daher eine Integraldarstellung in der Form (Duhamelsches Prinzip)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) dyds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s) dyds \end{aligned} \tag{2.44}$$

Sei nun $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

Satz 2.30. *Die Funktion u sei definiert durch (2.44). Dann gilt*

1) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,

2) $u_t - \Delta u = f \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$,

3) $u(x,t) \to 0$ *für* $(x,t) \to (x^0,0)$, $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ *und jeden Punkt* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Da die Fundamentallösung $\Phi(x,t)$ für $(x,t) = (0,0)$ eine Singularität hat, können wir in (2.44) nicht direkt unter dem Integral differenzieren. Wir betrachten daher zunächst die Variablentransformation

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f(x-y,t-s) dyds$$

Da $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ einen kompakten Träger hat und die Fundamentallösung in einer Umgebung von $t = s > 0$ glatt ist, folgt

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f_t(x-y,t-s) dyds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0) dy \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x-y,t-s) dyds \quad (i,j = 1,\dots,n)$$

Also folgt die Aussage $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.
Wir zeigen nun, dass die Integraldarstellung (2.44) eine Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung ist:

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x) f(x-y,t-s) \right] dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0) dy \\
&= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y) f(x-y,t-s) \right] dyds \\
&\quad + \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y) f(x-y,t-s) \right] dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0) dy \\
&=: I_\varepsilon + J_\varepsilon + K
\end{aligned}$$

Aus den Voraussetzungen an die rechte Seite f der Differentialgleichung und der Normierung der Fundamentallösung folgt die Abschätzung

$$|J_\varepsilon| \leq \Big(\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty} \Big) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) dyds \leq C\varepsilon$$

Für den Term I_ε erhalten wir durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \left[(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y) \Phi(y,s) \right] f(x-y,t-s) dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy - K
\end{aligned}$$

Fassen wir diese Ergebnisse zusammen, so gilt

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy \\
&= f(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)
\end{aligned}$$

Das die Funktion $u(x,t)$ für $t \to 0$ auch die homogene Anfangsbedingung annimmt, folgt schließlich aus der Abschätzung

$$\|u(\cdot, t\|_{L^\infty} \leq t\|f\|_{L^\infty}$$

$\square$

Man kann nun noch die beiden Resultate aus den Sätzen 2.29 und 2.30 kombinieren und erhält eine explizite Lösungsdarstellung

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds$$

für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit inhomogenen Randbedingungen,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

3.2. Mittelwertformeln. Für die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung gelten ähnliche Mittelwertformeln wie bei der Laplacegleichung, allerdings sind die Formeln etwas komlizierter. Zunächst benötigen wir einige Definitionen.
Die Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Dann definieren wir den parabolischen Zylinder $U_T := U \times (0,T]$ sowie den zugehörigen parabolischen Rand $\Gamma_T := \overline{U}_T \setminus U_t$.
Für festes $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(x,t;r)$ gegeben durch

$$E(x,t;r) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, s \leq t, \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n}\}$$

Man beachte, dass der Rand von $E(x,t;r)$ gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(x-y,t-s)$ darstellt. Mit Hilfe von $E(x,t)$ läßt sich nun folgende Mittelwerteigenschaft nachweisen.

Satz 2.31. *Sei $u \in C_1^2(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt*

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint\limits_{E(x,t;r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} u(y,s)dyds$$

für jede Menge $E(x,t;r) \subset U_T$.

Beweis. Der Beweis läuft analog zu Satz 2.5. Zunächst beobachtet man, dass es genügt den Fall $x=0$, $t=0$ zu untersuchen. Wir schreiben daher $E(r) = E(0,0;r)$ und setzen

$$\phi(r) := \frac{1}{r^n} \iint\limits_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} u(y,s)dyds$$

Das Prinzip besteht wieder darin zu zeigen, dass $\Phi'(r) = 0$ gilt: um die Ableitung zu berechnen verwenden wir also die Transformation $y = rz$, $s = r^2 w$ und erhalten

$$\Phi(r) = \iint\limits_{E(1)} \frac{|z|^2}{w^2} u(rz, r^2 w)dzdw$$

Damit berechnet man

$$\phi'(r) = \iint\limits_{E(1)} \frac{|z|^2}{w^2}\left(\sum_{i=1}^n u_{y_i} z_i + u_s 2rw\right) dzdw = \iint\limits_{E(1)} \left(\frac{|z|^2}{w^2}\sum_{i=1}^n z_i u_{y_i} + \frac{|z|^2}{w} 2ru_s\right) dzdw$$

Rücktransformation auf $E(r)$ ergibt also

$$\phi'(r) = \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{|y|^2}{s^2} y_i u_{y_i} + 2\frac{|y|^2}{s} u_s\right) dyds =: A + B$$

Definieren wir nun die Hilfsfunktion

$$\psi := -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\log r$$

so gilt

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_i} = \frac{y_i}{2s} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial\psi}{\partial y_i} = \frac{|y|^2}{2s} \tag{2.45}$$

und man kann den Term B umschreiben als

$$B = \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{i=1}^n \iint\limits_{E(r)} 4u_s y_i \psi_{y_i} dyds$$

Mit Hilfe partieller Integration bezüglich y erhalten wir

$$\iint\limits_{E(r)} y_i u_s \psi_{y_i} dyds = -\int\limits_{E(r)} \frac{\partial(y_i u_s)}{\partial y_i} \psi dyds = \int\limits_{E(r)} \left(u_s + u_{sy_i}\right) \psi dyds$$

wobei aufgrund der Bedingung $\Psi = 0$ auf dem Rand $\partial E(r)$ keine Randintegrale auftauchen. Also ergibt sich insgesamt für B der Ausdruck

$$B = -\frac{4}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \left(nu_s\psi + \sum_{i=1}^n u_{sy_i} y_i \psi\right) dyds$$

Partielle Integration bezüglich s liefert

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \left(-4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \psi_s\right) dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \left[-4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}\right)\right] dyds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \left(4nu_s\psi + \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i\right) dyds - A
\end{aligned}$$

Da u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, folgt

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= A+B \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} -4n\Delta u\psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dyds \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \left(4nu_{y_i}\psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i\right) dyds \\ &= 0\end{aligned}$$

nach (2.45). Daher ist die Funktion $\phi(r)$ konstant und

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0} \phi(t) = u(0,0)\left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^n} \iint\limits_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds\right) = 4u(0,0)$$

da

$$\frac{1}{t^n} \iint\limits_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds = \iint\limits_{E(1)} \frac{|z|^2}{w^2} dzdw = 4$$

□

3.3. Eigenschaften der Lösung. Analog zur Laplacegleichung gelten für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung folgende Maximumprinzipien

SATZ 2.32. *Sei $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt*

1)

$$\max_{(x,t)\in\overline{U}_T} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t)$$

2) *Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(x_0, t_0) \in U_T$ mit*

$$u(x_0,t_0) = \max_{(x,t)\in\overline{U}_T} u(x)$$

so folgt, dass u auf $\overline{U}_{t_0}$ konstant ist.

Wie bei der Laplacegleichung bezeichnet die Aussage 1) das Maximumprinzip der Wärmeleitungsgleichung, Aussage 2) das starke Maximumprinzip.

BEWEIS. Schritt 1): es existiere ein Punkt $(x_0, t_0) \in U_T$ mit $u(x_0, t_0) = M := \max_{\overline{U}_T} u$. Dann gibt es ein $r > 0$, sodass $E(x_0, t_0; r) \subset U_T$ und aus der Mittelwerteigenschaft erhalten wir

$$M = u(x_0,t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint\limits_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0-y|}{(t_0-s)^2} u(y,s) dyds \le M$$

da
$$\frac{1}{4r^n}\iint_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0-y|}{(t_0-s)^2}dyds = 1$$
Gleichheit gilt nur, wenn u auf ganz $E(x_0,t_0;r)$ gleich M ist. Also folgt
$$u(y,s) = M \quad \forall\, (y,s) \in E(x_0,t_0;r)$$
Sei nun L eine Liniensegment in U_T, die die beiden Punkte (x_0,t_0) und $(y_0,s_0) \in U_T$, $s_0 < t_0$ verbindet und betrachte
$$r_0 := \min\{s \geq s_0 \,|\, u(x,t) = M \;\forall (x,t) \in L, s \leq t \leq t_0\}$$
Da die Funktion u stetig ist, wird dieses Minimum angenommen. Wir nehmen an, dass $r_0 > s_0$. Dann gibt es einen Punkt (z_0,r_0) auf $L \cap U_T$ mit $u(z_0,r_0) = M$ und gilt $u = M$ auf $E(z_0,r_0;r)$ für hinreichend kleines r. Da aber $E(z_0,r_0;r)$ für geeignetes $\sigma > 0$ die Menge $L \cap \{r_0 - \sigma \leq t \leq r_0\}$ enthält, haben wir einen Widerspruch. Also gilt $r_0 = s_0$ und damit $u = M$ auf ganz L.
Schritt 2): sei $x \in U$ fest und $0 \leq t \leq t_0$. Dann existieren Punkte $\{x_0, x_1, \ldots, x_m = x\}$, so dass alle Liniensegmente in $\mathbb{R}^n$, die die Punkte x_{i-1} und x_i verbinden, in U liegen (für $i = 1,\ldots,m$). Dies ist möglich, da die Menge von Punkten in U, die durch einen polygonalen Pfad mit x_0 verbunden werden können, nichtleer, offen und relativ abgeschlossen in U ist. Seien nun $t_0 > t_1 > \cdots > t_m = t$ vorgegebene Zeitpunkte. Dann liegt das Liniensegment in $\mathbb{R}^{n+1}$, dass die beiden Punkte (x_{i-1},t_{i-1}) und (x_i,t_i) $(i = 1,\ldots,m)$ verbindet in U_T. Nach Schritt 1) gilt aber $u = M$ auf jedem dieser Liniensegmente und damit $u(x,t) = M$. □

Aus dem Maximumprinzip folgt wieder direkt die Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf beschränkten Gebieten.

Satz 2.33. *Sei $g \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(U_T)$. Dann existiert maximal eine Lösung $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ des Anfangsrandwertproblems*
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ \qquad\; u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

Man kann das Eindeutigkeitsresultat von oben auch für das zugehörige Cauchy–Problem beweisen, muss dann allerdings zusätzlich eine Kontrolle über das Lösungsverhalten für große $|x|$ voraussetzen.

Satz 2.34. *Sei $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ eine Lösung des Cauchy–Problems*
$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \;\; u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$
Zusätzlich erfülle u die Wachstumsbedingung
$$u(x,t) \leq Ae^{a|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T)$$
mit zwei Konstanten $A, a > 0$. Dann gilt
$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

Beweis. siehe Anhang □

Satz 2.35. *Sei $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Dann existiert maximal eine Lösung $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

die zusätzlich die Wachstumsbedingung

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2}$$

mit den Konstanten $A, a > 0$ erfüllt.

Bemerkung 2.36. *Man kann in der Tat zeigen, dass für das Problem*

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen existieren. Nur die Nulllösung erfüllt die angegebene Wachstumsbedingung.

Bezüglich der Regularität von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung kann man zeigen, dass Lösungen aus $C_1^2(U_T)$ direkt beliebig glatt in x und t sind.

Satz 2.37. *Sei $u \in C_1^2(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt $u \in C^\infty(U_T)$.*

Diese Aussage gilt insbesondere auch dann, wenn wir nicht–glatte Werte am Rand Γ_T vorschreiben.

Beweis. siehe Anhang □

Zum Abschluss geben wir noch Abschätzungen für die partiellen Ableitungen der Lösung:

Satz 2.38. *Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt*

$$\max_{C(x,t;r/2)} |D_x^k D_t^l u| \leq \frac{C_{kl}}{r^{k+2l+n+2}} \|u\|_{L^1(C(x,t;r))}$$

für alle $k, l = 0, 1, \ldots$ und jeden Zylinder $C(x,t;r/2) \subset C(x,t;r) \subset U_T$.

Beweis. siehe Anhang □

4. Die Wellengleichung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \tag{2.46}$$

sowie die inhomogene Wellengleichung der Form

$$u_{tt} - \Delta u = f \tag{2.47}$$

in Verbindung mit geeigneten Anfangs– und Randbedingungen. Hier bezeichnet $t > 0$ die Zeitvariable und $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable. Wir suchen also eine Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, wobei der Laplace–Operator auf die Ortsvariable $x = (x_1, \ldots, x_n)$ wirkt. Für die inhomogene Gleichung bezeichnet die rechte Seite eine gegebene Funktion $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$.
Wir werden im Folgenden sehen, dass die Lösungen der Wellengleichung ein ganz unterschiedliches Verhalten im Vergleich zur Laplacegleichung oder der Wärmeleitungsgleichung zeigen. Insbesondere sind Lösungen im Allgemeinen keine C^∞–Funktionen und beinhalten das Prinzip einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit.

4.1. Lösung durch sphärische Mittelung. In den vorangegangenen Abschnitten haben wir jeweils Lösungen gesucht, die auf Grund gewisser Skalierungen entstanden sind. Für die Wellengleichung betrachten wir stattdessen eine direkte Methode: für $n = 1$ erhalten wir im Falle eines Anfangswertproblems das System:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.48}$$

wobei g, h Anfangsbedindungen sind.
Man beobachtet, dass sich die Differentialgleichung auf folgende Weise faktorisieren lässt: es gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{2.49}$$

Setzen wir nun

$$v(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \tag{2.50}$$

so erhalten wir mit (2.49) eine Transportgleichung mit kostanten Koeffizienten:

$$v_t(x, t) + v_x(x, t) = 0$$

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.1 wissen wir, dass sich die Lösung in der Form

$$v(x, t) = a(x - t) \tag{2.51}$$

die die Anfangsbedingung $v(x, 0) = a(x)$ erfüllt. Kombinieren wir nun die Gleichungen (2.49), (2.50) und (2.51), so erhalten wir

$$u_t(x, t) - u_x(x, t) = a(x - t)$$

Dies ist eine inhomogene Transportgleichung und mit den Lösungsformeln aus Abschnitt 2.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t a(x+(t-s)-s)ds + u(x+t,0) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + u(x+t,0) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + g(x+t) \end{aligned} \tag{2.52}$$

In der Lösungsformel (2.52) müssen wir nun noch die vorgegebene Anfangsbedingung $u_t(x,0) = h(x)$ anpassen: man berechnet

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left(a(x+t) + a(x-t)\right) + g'(x+t)$$

und damit

$$u_t(x,0) = a(x) + g'(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad a(x) = h(x) - g'(x)$$

Also folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \big(h(y) - g'(y)\big)\, dy + g(x+t) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t) \end{aligned}$$

und wir erhalten schließlich

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy \tag{2.53}$$

Diese Darstellung nennt man die Formel von dAlembert.
Es bleibt zu überprüfen, dass unsere formalen Rechnungen auch tatsächlich erfüllt sind, d.h. wir müssen untersuchen, unter welchen Bedingungen die Lösung aus (2.53) tatsächlich glatt genug ist, um eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung zu sein:

Satz 2.39. *Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$ und definiere die Funktion u über die Formel von dAlembert (2.53). Dann gilt:*

1) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$
2) $u_{tt} - u_{xx} = 0$ *in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
3) $u(x,t) \to g(x^0)$ *und* $u_t(x,t) \to h(x^0)$ *für* $(x,t) \to (x^0,0)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ *und jeden Punkt* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Man beachte, dass sich die Lösungsformel (2.53) formal auch in der Form

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

mit geeigneten Funktionen F und G schreiben lässt. Umgekehrt sieht man, dass jede Funktion in dieser Form eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$ darstellt. Dies bedeutet, dass die allgemeine Lösung als die Summe der allgemeinen Lösung der Gleichung $u_t - u_x = 0$ und der allgemeinen Lösung von $u_t + u_x = 0$ darstellen lässt. In der Tat ist dies eine Konsequenz der Faktorisierung (2.49).
Sind die beiden Anfangsbedingungen $g \in C^k$ und $h \in C^{k-1}$, so folgt $u \in C^k$, aber nicht notwendigerweise in $C^m, m > k$. Dies ist eine wichtige Eigenschaft der Wellengleichung, denn gegebene Anfangsbedingungen werden im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung nicht instantan geglättet.
Eine weitere Anwendung der Formel von d'Alembert ist die sogenannte Reflektionsmethode: wir betrachten dazu das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x=0\} \times (0,\infty) \end{cases}$$

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.
Mit Hilfe der Reflektionen

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t) & (x \geq 0, t \geq 0) \\ -u(-x,t) & (x \leq 0, t \geq 0) \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ -g(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ -h(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

läßt sich das Problem zurückführen auf

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g},\ \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases}$$

und damit lautet die Lösungsformel nach d'Alembert

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy$$

Wir erhalten schließlich als Lösung des Ausgangsproblems

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy & x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(y)dy & 0 \leq x \leq t \end{cases} \tag{2.54}$$

Wir betrachten nun den höherdimensionalen Fall $n \geq 2$ und suchen eine Lösung $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, $m \geq 2$ für das Anfangswertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{array} \right. \tag{2.55}$$

Die Ideen nun ist durch geeignete sphärische Mittelungen eine vereinfachte Differentialgleichung abzuleiten, die uns dann eine explizite Lösungsformel für die höherdimensionale Wellengleichung liefert.

Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definieren wir den Mittelwert von $u(x,t)$ über die Sphäre $\partial B(x,r)$,

$$U(x;r,t) := ⨍_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y) \tag{2.56}$$

Weiter sei

$$\left\{ \begin{array}{lll} G(x;r) & := & ⨍_{\partial B(x,r)} g(y)dS(y) \\ H(x;r) & := & ⨍_{\partial B(x,r)} h(y)dS(y) \end{array} \right.$$

Satz 2.40. *Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u erfülle (2.55). Dann ist gilt für U als Funktion von (r,t) definiert durch (2.56)*

1) $U \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\infty))$
2) *U löst die* Euler–Poisson–Darboux Gleichung

$$\left\{ \begin{array}{rl} U_{tt} - U_{rr} - \dfrac{n-1}{r}U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ U = G,\, U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \end{array} \right.$$

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 2.5 wissen wir, dass

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} ⨍_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy \tag{2.57}$$

und damit $\lim_{r\to 0^+} U_r(x;r,t) = 0$. Für die zweite Ableitung erhalten wir

$$U_{rr}(x;r,t) = ⨍_{\partial B(x,r)} \Delta u dS + \left(\frac{1}{n} - 1\right) ⨍_{B(x,r)} \Delta u dy$$

Also gilt $\lim_{r\to 0^+} U_{rr}(x;r,t) = \frac{1}{n}\Delta u(x,t)$. Man berechnet weiter die dritte Ableitung U_{rrr} etc. und verifiziert damit, dass $u \in C^m(\overline{\mathbb{R}}^n \times [0,\infty))$.

Nach (2.57) gilt

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} ⨍_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dy = \frac{r}{n} ⨍_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)dy$$

Daraus folgt

$$r^{n-1}U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{B(x,r)} u_{tt}dy$$

und daher

$$(r^{n-1}U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} ⨍_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} U_{tt}$$

$\square$

Man verwendet nun die Euler–Poisson–Darboux Gleichung um, in Abhängigkeit von der Dimension, explizite Lösungsdarstellungen für die Wärmeleitungsgleichung zu entwickeln. Man verwendet dabei eine Transformation der Gleichung auf die eindimensionale Wellengleichung. Da der allgemeine Fall (Dimension n vorgegeben) etwas kompliziert ist, betrachten wir hier zunächst die Spezialfälle $n = 3$ und $n = 2$.
Im Fall $n = 3$ erhalten wir für die Lösung des Anfangswertproblems (2.55) die Kirchhoffsche Formel

$$u(x,t) = ⨍_{\partial B(x,t)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x))\, dS(y) \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0) \tag{2.58}$$

Um diese Formel abzuleiten, setzen wir

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= rU \\ \tilde{G} &:= rG, \quad \tilde{H} := rH \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}$$

Also löst $\tilde{U}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G},\, \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r = 0\} \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.59}$$

Mit der Lösungsformel (2.54) folgt für $0 \le r \le t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy$$

Aus der Definition von $U(x;r,t)$ folgt $u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} U(x;r,t)$ und damit

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \left(\frac{\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int\limits_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy \right) \\ &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Definitionen von G und H ergibt sich demnach

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} g dS\right) + t \fint_{\partial B(x,t)} h dS \tag{2.60}$$

Nun gilt

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz) dS(z)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} g dS\right) &= \fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+tz)\cdot z dS(z) \\ &= \fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right) dS(y) \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (2.60) ein, so erhalten wir direkt die Kirchhoffsche Formel (2.58).
Für die Dimension $n = 2$ erhält man für die Lösung des Anfangswertproblems (2.55) die Poissonsche Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\fint_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + tDg(y)\cdot(y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy \tag{2.61}$$

für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$. Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das Anfangswertproblem (2.55) für $n = 3$ und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung nicht von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt. Man sucht also eine Lösung der Form

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t)$$

wobei u eine Lösung des Problems für $n = 2$ ist. Wir verzichten hier auf eine genaue Ableitung der Poissonschen Formel und verweisen auf das Textbuch von Evans.
Wir geben nun noch die Lösungen der Euler–Poisson–Darboux Gleichung für allgemeine Dimensionen an. Dabei muss eine Fallunterscheidung nach geraden und ungeraden n gemacht werden. Wir betrachten zuerst den Fall $n \geq 3$ ungerade:

Lemma 2.41. *Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $C^{k+1}(\mathbb{R})$. Dann gilt*

1)
$$\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}\left(r^{2k}\frac{d\phi}{dr}(r)\right)$$

2)
$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k r^{j+1}\frac{d^j\phi}{dr^j}(r)$$

wobei die Konstanten β_j^k $(j = 0, \ldots, k-1)$ unabhängig von ϕ sind,

3) $\beta_0^k = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)$.

Beweis. (siehe Übungsblatt 5) □

Wir setzen wieder $U(x;r,t)$ als den Mittelwert von u über die Sphäre $\partial B(x,r)$, wobei wir annehmen, dass u als Lösung des Anfangswertproblems (2.55) eine C^{k+1}–Funktion auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ ist.
Weiter setzen wir

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{U}(r,t) & := & \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U(x;r,t)\right) \\ \tilde{G}(r) & := & \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}G(x;r)\right) \qquad (r>0, t\geq 0) \\ \tilde{H}(r) & := & \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}H(x;r)\right) \end{array}\right. \tag{2.62}$$

Dann gilt

$$\tilde{U}(r,0) = \tilde{G}(r),\ \tilde{U}_t(r,0) = \tilde{H}(r)$$

Man zeigt nun, dass durch die Transformation von $U \to \tilde{U}$ die Euler–Poisson-Darboux Gleichung auf die eindimensionale Wellengleichung transformiert wird.

Lemma 2.42. *Es gilt*

$$\left\{\begin{array}{rl} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \textit{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \tilde{U}_t = \tilde{H} & \textit{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ \tilde{U} = 0 & \textit{auf } \{r=0\} \times (0,\infty) \end{array}\right. \tag{2.63}$$

Beweis. Für $r>0$ berechnet man direkt

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{rr} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U(x;r,t)\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k}\left(r^{2k}U\right) \\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[r^{2k-1}U_{rr} + 2kr^{2k-2}U_r\right] \\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[r^{2k-1}\left(U_{rr} + \frac{n-1}{r}U_r\right)\right] \qquad (n = 2k+1) \\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U_t t\right) = \tilde{U}_{tt} \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.41 folgt direkt, dass $\tilde{U}=0$ auf der Menge $\{r=0\}$. □

Für die Lösung von Problem (2.63) ergibt sich für $r \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ mit $0 \leq r \leq t$

$$\tilde{U}(r,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)dy \tag{2.64}$$

Da aber $u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x;r,t)$, sowie

$$\tilde{U}(r,t) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U(x;r,t)\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k r^{j+1}\frac{\partial^j}{\partial r^j}U(x;r,t)$$

und daher

$$\lim_{r\to 0}\frac{\tilde{U}(r,t)}{\beta_0^k r}=\lim_{r\to 0}U(x;r,t)=u(x,t)$$

folgt aus der Darstellung (2.64) die Formel

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\beta_0^k}\lim_{r\to 0}\left(\frac{\tilde{G}(t+r)-\tilde{G}(t-r)}{2r}+\frac{1}{2r}\int\limits_{t-r}^{t+r}\tilde{H}(y)dy\right)\\ &= \frac{1}{\beta_0^k}\left(\tilde{G}'(t)+\tilde{H}(t)\right)\end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich für $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$

$$\text{(2.65)}\qquad \begin{cases} u(x,t) = \dfrac{1}{\gamma_n}\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\left(\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}⨍_{\partial B(x,t)} gdS\right)\right.\\ \qquad\qquad \left.+\left(\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}⨍_{\partial B(x,t)} hdS\right)\right]\\ \qquad\qquad n \text{ ungerade }, \gamma_n = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(n-2)\end{cases}$$

Für den Fall $n=3$ liefert (2.65) genau die Kirchhoffsche Formel.

Satz 2.43. *Sei $n\geq 3$ ungerade, $g\in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $h\in C^m(\mathbb{R}^n)$ für $m=(n+1)/2$. Definiere u durch (2.65). Dann gilt*

1) $u\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$,
2) $u_{tt}-\Delta u=0$ *in* $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$,
3) $u(x,t)\to g(x^0)$ *und* $u_t(x,t)\to h(x^0)$ *für* $(x,t)\to(x^0,0)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$ *und jeden Punkt* $x^0\in\mathbb{R}^n$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $g\equiv 0$, sodass

$$u(x,t)=\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}H(x;t)\right)$$

Dann gilt nach Lemma 2.41

$$u_{tt}=\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(t^{n-1}H_t\right)$$

Wir wissen aber, dass gilt

$$H_t=\frac{t}{n}⨍_{B(x,t)}\Delta h dy$$

und daher folgt

$$u_{tt}=\frac{1}{n\alpha(n)\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\int\limits_{B(x,t)}\Delta h dy\right)=\frac{1}{n\alpha(n)\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{\partial B(x,t)}\Delta h dS\right)$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\Delta H(x;t) = \Delta_x \fint_{\partial B(0,t)} h(x+y)dS(y) = \fint_{\partial B(x,t)} \Delta h dS$$

und daher $u_{tt} = \Delta u$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Auf ähnliche Weise betrachtet man den Fall $h \equiv 0$ und damit gilt Aussage 2) des Satzes.
Mit Hilfe von Lemma 2.41 zeigt man, dass u auch die richtigen Anfangsbedingungen annimmt. □

Bemerkung 2.44.

1) *Um die Lösung der Wellengleichung am Punkt (x,t) zu berechnen, benötigt man nur Informationen von den Anfangsbedingungen g und h auf der Sphäre $\partial B(x,t)$; nicht etwa auf der Kugel $B(x,t)$.*
2) *Man beachte, dass man aus der Lösungsdarstellung (2.65), wie bereits für $n=1$, die* endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit *(von kleinen Störungen in g und/oder h) bei der Wellengleichung beobachten.*
3) *Die Formel (2.65) läßt sich auch auf einen komplett anderen Weg mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung ableiten.*

Wir kommen nun zum Fall n gerade und nehmen an, dass u eine C^m–Lösung von (2.55), $m = (n+2)/2$, ist. Dabei verwenden wir denselben Trick wie beim Übergang von $n=3$ auf $n=2$, d.h. wir suchen eine Funktion

$$\bar{u}(x_1,\dots,x_{n+1},t) := u(x_1,\dots,x_n,t) \tag{2.66}$$

als Lösung der Wellengleichung in $\mathbb{R}^{n+1} \times (0,\infty)$ mit den Anfangsbedingungen

$$\bar{u} = \bar{g}, \quad \bar{u}_t = \bar{h}$$

auf $\mathbb{R}^{n+1} \times \{t=0\}$, wobei

$$\begin{aligned} \bar{g}(x_1,\dots,x_{n+1}) &:= g(x_1,\dots,x_n) \\ \bar{h}(x_1,\dots,x_{n+1}) &:= h(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

Für festes $x \in \mathbb{R}^n$, $t>0$ schreiben wir $\bar{x} = (x_1,\dots,x_n,0)$ und erhalten aus (2.65)

$$\left\{ \begin{aligned} u(x,t) \;=\; & \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^{n-1} \fint_{\partial \bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g} d\bar{S} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^{n-1} \fint_{\partial \bar{B}(\bar{x},t)} \bar{h} d\bar{S} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

Dabei bezeichnet $\bar{B}(\bar{x},t)$ die Kugel im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Mittelpunkt $\bar{x}$ und Radius t sowie $d\bar{S}$ das n–dimensionale Oberflächenmaß auf $\partial\bar{B}(\bar{x},t)$. Nun gilt (Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned}
\fint_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}d\bar{S} &= \frac{1}{(n+1)\alpha(n+1)t^n} \int\limits_{\partial\bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}d\bar{S} \\
&= \frac{2}{(n+1)\alpha(n+1)t^{n-1}} \int\limits_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy \\
&= \frac{2t\alpha(n)}{(n+1)\alpha(n+1)} \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy
\end{aligned}$$

Verwendet man eine analoge Methode für die Funktion h, so ergibt sich die Formel

$$\begin{aligned}
u(x,t) \quad = \quad & \frac{2\alpha(n)}{\gamma_{n+1}(n+1)\alpha(n+1)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy \right)\right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy \right)\right]
\end{aligned}$$

Weiter berechnet man, dass

$$\gamma_{n+1}\frac{(n+1)\alpha(n+1)}{2\alpha(n)} = 2\cdot 4\cdot \dots \cdot (n-2)\cdot n =: \gamma_n$$

sodass sich schließlich die Lösungsdarstellung

$$\tag{2.67}
\begin{cases}
u(x,t) = \dfrac{1}{\gamma_n}\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\left(\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \fint_{B(x,t)} \dfrac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy \right)\right. \\
\qquad\qquad \left. + \left(\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \fint_{B(x,t)} \dfrac{h(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy \right)\right] \\
\qquad\qquad n \text{ gerade }, \gamma_n = 2\cdot 4\cdot \dots \cdot (n-2)\cdot n
\end{cases}$$

ergibt.

Analog zu Satz 2.43 beweist man damit

Satz 2.45. *Sei $n \geq 2$ gerade, $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ für $m = (n+2)/2$. Definiere u durch (2.67). Dann gilt*

1) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$,
2) $u_{tt} - \Delta u = 0$ *in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,
3) $u(x,t) \to g(x^0)$ *und* $u_t(x,t) \to h(x^0)$ *für* $(x,t) \to (x^0,0)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ *und jeden Punkt* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung 2.46. *Man beachte, dass im Gegensatz zu n ungerade im Fall n ungerade die Lösung am Punkt (x,t) von den Werten von g und h auf der ganzen Kugel $B(x,t)$ und nicht nur von den Werten auf dem Rand $\partial B(x,t)$ abhängt.*

4.2. Die inhomogene Wellengleichung. Wir betrachten nun das Anfangswertproblem für die inhomogene Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0,\ u_t = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.68}$$

Nach dem Duhamelschen Prinzip aus Abschnitt 2.3.1, definieren wir $u = u(x,t;s)$ als Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_{tt}(\cdot;s) - \Delta u(\cdot;s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u(\cdot;s) = 0,\ u_t(\cdot;s) = f(\cdot,s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases}$$

und setzen dann

$$u(x,t) := \int_0^t u(x,t;s)ds \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) \tag{2.69}$$

Damit erhalten wir, was man direkt nachrechnet, eine Lösung von (2.68).

Satz 2.47. *Sei $n \geq 2$ und $f \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ und u definiert durch (2.69). Dann gilt*

1) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$,
2) $u_{tt} - \Delta u = f$ *in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,
3) $u(x,t) \to 0$ *und* $u_t(x,t) \to 0$ *für* $(x,t) \to (x^0,0)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ *und jeden Punkt* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Durch einfaches Nachrechnen. □

Bemerkung 2.48. *Die Lösung des allgemeinen inhomogenen Problems ist offensichtlich die Summe der Lösung des homogenen Problems (2.55) und der Lösung des inhomogenen Problems (2.68) mit homogenen Anfangsdaten.*

Beispiel 2.49. *1) Im Fall $n = 1$ erhalten wir aus der Formel von d'Alembert*

$$u(x,t;s) = \frac{1}{2}\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)dy, \quad u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)dyds$$

Damit ergibt sich

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y,t-s)dyds \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

2) Für $n = 3$ folgt aus der Kirchhoffschen Formel

$$u(x,t;s)0(t-s) \fint_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)dS$$

und damit

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int\limits_0^t (t-s)\left(⨍_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)dS\right)ds \\
&= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t ⨍_{\partial B(x,t-s)} \frac{f(y,s)}{(t-s)}dSds \\
&= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t ⨍_{\partial B(x,r)} \frac{f(y,t-r)}{r}dSds
\end{aligned}
$$

Man erhält also die Lösungsdarstellung

$$
u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{B(x,t)} \frac{f(y,t-|y-x|)}{|y-x|}dy \quad (x\in\mathbb{R}^3, t\geq 0)
$$

Der Integrand wird auch als retardiertes Potential *bezeichnet.*

4.3. Energiemethoden. Energiemethoden sind wichtige Hilfsmittel bei der Untersuchung von Eigenschaften partieller Differentialgleichungen. Sie finden Anwendung bei allen fundamentalen linearen Gleichungen, die wir im zweiten Kapitel betrachtet haben. Wir gehen hier kurz auf die Anwendung bei der Wellengleichung ein.
Mit Hilfe von sogenannten Energienormen lassen sich weitere theoretische Eigenschaften der Wellengleichung angeben. Sei dazu $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand ∂U. Wir setzen wieder $U_T = U\times(0,T]$, $\Gamma_T = \overline{U}_T - U_T$, mit $T>0$. Weiter untersuchen wir das Anfangsrandwertproblem

$$
\left\{
\begin{aligned}
u_{tt}-\Delta u &= f && \text{in } U_T \\
u &= g && \text{auf } \Gamma_T \\
u_t &= h && \text{auf } U\times\{t=0\}
\end{aligned}
\right. \tag{2.70}
$$

Satz 2.50. *Es existiert maximal eine Lösung $u\in C^2(\overline{U}_T)$ des Problems (2.70).*

Beweis. Sei $\tilde{u}$ eine weitere Lösung, dann löst $w := u-\tilde{u}$ das Problem

$$
\left\{
\begin{aligned}
w_{tt}-\Delta w &= 0 && \text{in } U_T \\
w &= 0 && \text{auf } \Gamma_T \\
w_t &= 0 && \text{auf } U\times\{t=0\}
\end{aligned}
\right.
$$

Wir definieren nun die Energie

$$
e(t) := \frac{1}{2}\int\limits_U w_t^2(x,t) + |Dw(x,t)|^2 dx \quad (0\leq t\leq T)
$$

und berechnen mittels partieller Integration

$$
\frac{de(t)}{dt} = \int\limits_U (w_t w_{tt} + Dw\cdot Dw_t)dx = \int\limits_U w_t(w_{tt}-\Delta w)dx = 0
$$

wobei auf Grund der Randbedingungen an w keine Randterme auftauchen. Damit gilt für alle $0 \leq t \leq T$, $e(t) = e(0) = 0$ und folglich $w_t = Dw = 0$ in ganz U_T. Aus der Anfangsbedingung $w = 0$ auf $U \times \{t = 0\}$ folgt dann aber $w = u - \tilde{u} = 0$ in U_T. □

Eine weitere direkte Anwendung ist der sogenannte Abhängigkeitsbereich bei Lösungen der Wellengleichung: sei dazu $u \in C^2$ eine Lösung der Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $t_0 > 0$ fest definieren wir den Kegel

$$C := \{(x, t) \,|\, 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}$$

Satz 2.51. *Gilt $u \equiv u_t \equiv 0$ in $B(x_0, t_0)$ dann folgt $u \equiv 0$ in ganz C.*

Beweis. Wir definieren wieder

$$e(t) := \frac{1}{2} \int\limits_{B(x_0, t_0 - t)} (u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2) dx \quad (0 \leq t \leq t_0)$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{de(t)}{dt} &= \int\limits_{B(x_0, t_0 - t)} (u_t u_{tt} + Du \cdot Du_t) dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\partial B(x_0, t_0 - t)} (u_t^2 + |Du|^2) dS \\
&= \int\limits_{B(x_0, t_0 - t)} u_t (u_{tt} - \Delta u) dx + \int\limits_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t dS - \frac{1}{2} \int\limits_{\partial B(x_0, t_0 - t)} (u_t^2 + |Du|^2) dS \\
&= \int\limits_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |Du|^2 \right) dS
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \right| \leq |u_t||Du| \leq \frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}|Du|^2$$

Daraus folgt aber, dass $de(t)/dt \leq 0$ und somit $e(t) \leq e(0) \leq 0$ für alle $0 \leq t \leq t_0$. Das bedeutet aber, dass $u_t = Du \equiv 0$ und folglich $u \equiv 0$ in ganz C.

□