Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. S. Heitmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 5

Aufgabe 14: Zeigen Sie, dass ein lineares Differenzenverfahren mit konstanten Koeffizienten genau dann monotonie–erhaltend ist, wenn alle Koeffizienten nicht–negativ sind.

Aufgabe 15: Betrachten Sie für $u = u(x)$ $(n = 1)$ die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} Lu &= -u'' + bu' + cu = f(x) \quad \text{in } (0,1) = \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma = \{0,1\}. \end{aligned}$$

Diskretisieren Sie das Problem mittels Differenzenquotienten.
Betrachten Sie die Matrix

$$L_h := \begin{bmatrix} d & r & & \\ l & d & r & \\ & \ddots & \ddots & r \\ & & l & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit $l \cdot r > 0$. Weisen Sie nach, dass L_h die Eigenwerte

$$\lambda_i = d + 2\sqrt{lr}\,\operatorname{sign}(l)\cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right), \ 1 \leq i \leq n$$

und die Eigenvektoren v^i mit den Komponenten

$$v_j^i = \left(\frac{l}{r}\right)^{\dfrac{j-1}{2}} \sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right), \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

besitzt.

Aufgabe 16: Schätzen Sie die Kondition von L_h bzgl. der Euklidischen Norm für den Spezialfall $b = c = 0$ mit Hilfe der Eigenwerte aus Aufgabe 15 ab. Welcher Zusammenhang ergibt sich zwischen Kondition und Gitterweite $h = 1/(n+1) \ll 1$?