Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. S. Heitmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 4

Aufgabe 11: Betrachten Sie das Verfahren von Roe für den Fall der Burgers–Gleichung zu der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & : \quad x \le 0 \\ 1 & : \quad x > 0 \end{cases} .$$

Sei $\lambda = k/h = 1/2$ und die Anfangswerte seien gegeben durch Zellmittelwerte. Zeigen Sie, dass für $k \to 0$ zwei Teilfolgen, definiert durch $k_l = 1/(2l)$ and $k_l = 1/(2l+1)$, existieren, die für $l \to \infty$ gegen unterschiedliche schwache Lösungen konvergieren.

Aufgabe 12: Untersuchen Sie, ob das Verfahren von Lax und Wendroff unter der gewöhnlichen CFL–Bedingung TVD und L^∞–stabil ist.

Aufgabe 13: Implementieren Sie das Verfahren von Roe sowie das Verfahren von Godunov für die Burgers–Gleichung und testen Sie beide Verfahren für die Anfangsbedingung aus Aufgabe 11.

Aufgabe 14: Entwickeln Sie ein ‚möglichst gutes' Differenzenverfahren zur Lösung der linearen Advektionsgleichung aus einer geschickten Kombination von Lax-Wendroff- und Beam-Warming-Verfahren (siehe dazu vor allem Aufgabe 8). Die entsprechenden modifizierten Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= \frac{ah^2}{6}\left((\lambda a)^2 - 1\right) u_{xxx} \quad \text{für Lax-Wendroff,} \\ u_t + au_x &= \frac{ah^2}{6}\left(2 - 3\lambda a + 3(\lambda a)^2\right) u_{xxx} \quad \text{für Beam-Warming.} \end{aligned}$$

Implementieren Sie das Verfahren und diskutieren Sie gegebenenfalls die Verbesserungen gegenüber Lax-Wendroff- und Beam-Warming-Verfahren.