Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. Stefan Heitmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 2

Aufgabe 4: Sei durch H ein Differenzenverfahren definiert, wobei die numerische Flussfunktion $F \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^{2m})$ ist. Zeigen Sie, dass der lokale Abschneidefehler von der Form

$$(Lu)(x,t) = -k\partial_x\Big(\beta(u,\lambda)\partial_x u\Big) + O(k)$$

mit

$$\beta(u,\lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2}\sum_{l=-m}^{m} l^2 \partial_l H(u,\ldots,u) - a^2(u)\right)$$

ist.

Aufgabe 5: Untersuchen Sie das Beam–Warming Verfahren für die lineare Advektionsgleichung $u_t + au_x = 0$, das durch

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{a\lambda}{2}\left(3u_i^j - 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^j\right) + \frac{a^2\lambda^2}{2}\left(u_i^j - 2u_{i-1}^j + u_{i-2}^j\right)$$

definiert ist, auf Konservativität, Konsistenz, numerische Viskosität und L^2–Stabilität.

Aufgabe 6: Berechnen Sie für die beiden Verfahren aus Aufgabe 3 (Zweischritt–Lax–Wendroff Verfahren und das Verfahren von MacCormack) die numerische Viskosität und untersuchen Sie die Verfahren auf L^2–Stabilität.

Aufgabe 7: Berechnen Sie numerische Lösungen für die skalare Erhaltungsgleichung

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit Hilfe des Verfahrens von Lax und Friedrichs, des Zweischritt–Lax–Wendroff Verfahres sowie des Verfahrens von MacCormack. Verwenden Sie zudem das konservative Verfahren mit der numerischen Flussfunktion

$$F(u,v) = \begin{cases} f(u) & \text{wenn } (f(v)-f(u))(u-v) \geq 0 \\ f(v) & \text{sonst} \end{cases}$$