Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. Stefan Heitmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 1

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass ein explizites Einschrittverfahren der Form $u^{j+1} = Hu^j$ dann und nur dann in Erhaltungsform geschrieben werden kann, falls für alle $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z})$ gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (Hu)_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i$$

Aufgabe 2: Gegeben seien das Zweischrittverfahren von Lax–Wendroff ($\lambda = k/h$)

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^{j+1/2} &= \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^j + u_i^j\right) - \frac{\lambda}{2}\left(f(u_{i+1}^j) - f(u_i^j)\right) \\ u_i^{j+1} &= u_i^j - \lambda\left(f(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}})\right) \end{aligned}$$

und das McCormack–Verfahren

$$\begin{aligned} u_i^{j+\frac{1}{2}} &= u_i^j - \lambda\left(f(u_{i+1}^j) - f(u_i^j)\right) \\ u_i^{j+1} &= \frac{1}{2}\left(u_i^j + u_i^{j+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\lambda}{2}\left(f(u_i^{j+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-1}^{j+\frac{1}{2}})\right). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass beide Verfahren konservativ sind und dass die numerische Flussfunktion konsistent ist.

Aufgabe 3: Implementieren Sie die folgenden Verfahren für die lineare Advektionsgleichung $u_t + au_x = 0$ mit Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ und $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} &= u_i^j - a\frac{k}{2h}\left(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j\right) \quad \text{(naives Verfahren)} \\ u_i^{j+1} &= u_i^j - a\frac{k}{h}\left(u_{i+1}^j - u_i^j\right) \quad \text{(Vorwärtsdifferenz)} \\ u_i^{j+1} &= u_i^j - a\frac{k}{h}\left(u_i^j - u_{i-1}^j\right) \quad \text{(Rückwärtsdifferenz)} \\ u_i^{j+1} &= \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right) - a\frac{k}{2h}\left(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j\right) \quad \text{(Lax-Friedrichs Verfahren)} \\ u_i^{j+1} &= u_i^j - a\frac{k}{2h}\left(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j\right) + a^2\frac{k^2}{2h^2}\left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right) \quad \text{(Lax-Wendroff Verfahren)} \end{aligned}$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Verfahren für glatte und nicht–glatte Anfangsbedingungen, positive und negative Werte für a und unterschiedliche Gitterverhältnisse k/h (insbesondere $|ak/h| \leq 1$ und $|ak/h| > 1$). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.