Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. S. Heitmann

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 10

Aufgabe 27: Lösen Sie die zweidimensionale Randwertaufgabe mit Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} & \text{in } (0,1)\times(0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,y,0) = 1 - x - y^2 & \text{auf } (0,1)\times(0,1)\times\{t=0\} \\ u(0,y,t) = 0, \quad u(x,0,t) = 0 & \end{cases}$$

numerisch mit Hilfe finiter Differenzen. Wählen Sie die Standard-Diskretisierung für die räumlichen Ableitungen. Welche Stabilitätsgrenze ergibt sich experimentell für das Euler-Verfahren? Betrachten Sie die beim Crank-Nicholson-Verfahren

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{k}{h^2}\left(\frac{1}{2}\delta_x^2 u_{i,j}^n + \frac{1}{2}\delta_x^2 u_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2}\delta_y^2 u_{i,j}^n + \frac{1}{2}\delta_y^2 u_{i,j}^{n+1}\right)$$

entstehende Koeffizienten-Matrix und diskutieren Sie die Struktur. Implementieren Sie das Crank-Nicholson-Verfahren, indem Sie eine Zeitschicht $t_{n+1/2}$ einführen, so dass

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1/2} &= u_{i,j}^n + \frac{k}{h^2}\left(\frac{1}{2}\delta_y^2 u_{i,j}^n + \frac{1}{2}\delta_x^2 u_{i,j}^{n+1/2}\right), \\ u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^{n+1/2} + \frac{k}{h^2}\left(\frac{1}{2}\delta_x^2 u_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{2}\delta_y^2 u_{i,j}^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Diese Art der Diskretisierung nennt man ADI (*alternating direction implicit*)– Methode. Wie verändert sich die Struktur der Koeffizientenmatrix?

Aufgabe 28: Betrachten Sie die lineare Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad x \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die (verallgemeinerte) Lösung werde approximiert durch die Lösung der endlich-dimensionalen Variationsaufgabe

$$u_h \in V_h : a(u_h, v_h) = F(u_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h.$$

Wählen Sie eine Basis des V_h, $\{v_1, ..., v_n\}$, und stellen Sie das entstehende lineare Gleichungssystem auf. Zeigen Sie, dass es für linear unabhängige $v_1, \ldots, v_n$ eine eindeutige Lösung besitzt, da die resultierende Koeffizientenmatrix positiv definit ist. Benutzen Sie dazu die Ungleichung von Poincare.

Aufgabe 29 (bis zum 11.7.): Betrachten Sie die lineare Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y), \quad x \in \Omega := \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) &= 0, \quad x \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Um das entsprechende Variationsproblem zu lösen, muss man Ansatzfunktionen finden, die die Randbedingungen erfüllen. Wählen Sie versuchsweise

$$v_j(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)^{j/2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass die entstehende Koeffizienten-Matrix die Gestalt

$$A = (a_{ij}) = 2\pi \left(\frac{ij}{i+j} \right) \quad i, j = 1, \ldots, n$$

hat und diskutieren Sie die Kondition der Matrix A für verschiedene n.