Prof. Dr. M. Hinze SoSe 2010

Dr. J.Sternberg-Kaletta

Übungen zur Vorlesung Optimierung

Blatt 7

Abgabetermin: Theoretische Aufgaben 04.06.2010 vor der Übung. Vorführung Numerik 10.06.2010, 16.00 in GEOM 142

Aufgabe 22: (Punkte 4 (2+2)) Sei $f : I\!R^n \to I\!R$ zweimal stetig differenzierbar und $x^0 \in I\!R^n$. Zeigen Sie, dass bei Vorlage einer der folgenden Bedingungen

a) $\|D^2 f(x)\|$ ist beschränkt auf einer konvexen Obermenge X der Niveaumenge $N_f(x^0)$,

b) die Niveaumenge $N_f(x^0)$ ist kompakt,

der Gradient ∇f Lipschitz-stetig auf $N_f(x^0)$ ist.

Aufgabe 23: (4 Punkte) Zeigen Sie, dass Fletcher-Reeves Algorithmus mit Schrittweiten (t_k) gemäß Schritt iii) δ ($T_{SWP}(x,d)$ mit $0 < \alpha < \eta < \frac{1}{2}$) Abstiegsrichtungen (d^k) generiert. Tipp: Zeigen Sie, dass

$$-\sum_{j=1}^{k} \eta^j \leq \frac{\nabla f(x^k)^t d^k}{\|\nabla f(x^k)\|^2} \leq -2 + \sum_{j=1}^{k} \eta^j \text{ for all } k \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist, wobei (x^k) die Iterierten und (d^k) die mittels des Algorithmus' erzeugten Suchrichtungen bezeichnen.

Aufgabe 24: (4 Punkte) Sei $f : I\!R^n \to I\!R$ 2 mal stetig differenzierbar, $x^0 \in I\!R^n$, $N_f(x^0)$ konvex und f auf $N_f(x^0)$ gleichmäßig konvex. Zeigen Sie, dass Fletcher-Reeves Algorithmus mit iii) δ gegen das eindeutig bestimmte Minimum von f in $N_f(x^0)$ konvergiert.

Aufgabe 25: (4 Punkte (2+2)) (Sherman-Morrison-Woodbury-Formel)

(a) Gegeben seien Matrizen $U, V \in \mathbb{R}^{n\times m}$. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ seien invertierbar. Zeigen Sie:

$M := A + USV^\top$ ist genau dann invertierbar, wenn $W := S^{-1} + V^\top A^{-1} U$ invertierbar ist. Im Falle der Invertierbarkeit von M gilt die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel

$$M^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U W^{-1} V^\top A^{-1}.$$

Tip: Verifizieren Sie die Formel, indem Sie mit M multiplizieren.

(b) Zeigen Sie mit (a): $M = A + uv^\top$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann invertierbar, wenn $1 + v^\top A^{-1} u \neq 0$ gilt. Dann gilt

$$M^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1} u}.$$

Numerische Aufgabe

Quasi-Newton-Verfahren mit BFGS-Update

(i) Wähle einen Startvektor $x^{[0]} \in \mathbb{R}^n$ und eine symmetrische und positiv definite Matrix $H_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Setze $k = 0$.

(ii) Falls $\|\nabla f(x^{[k]})\| = 0$, STOP.

(iii) Berechne Suchrichtung $d^{[k]}$ als Lösung des Gleichungssystems

$$H_i d^{[k]} = -\nabla f(x^{[k]})$$

und berechne eine Scrittweite t_k (z.B. mit Wolfe-Powell-Schrittweitenstrategie). Weiterhin berechne:

$$\begin{aligned}
x^{[k+1]} &= x^{[k]} + t_k d^{[k]}, \\
s^{[k]} &= x^{[k+1]} - x^{[k]}, \\
y^{[k]} &= \nabla f(x^{[k+1]}) - \nabla f(x^{[k]}), \\
H_{k+1} &= H_k + \frac{y^{[k]}(y^{[k]})^\top}{(y^{[k]})^\top s^{[k]}} - \frac{(H_k s^{[k]})(H_k s^{[k]})^\top}{(s^{[k]})^\top H_k s^{[k]}}.
\end{aligned}$$

(iv) Setze $k := k+1$, und gehe zu (ii).

Implementieren Sie das Quasi-Newtonverfahren. Verwenden Sie die Wolfe-Powell-Schrittweitenstrategie zur Bestimmung einer Schrittweite und die BFGS-Update-Formel zum Update der Quasi-Newton-Matrix H.

Testen Sie das Programm mit den Parametern $\alpha = 0.01$, $\eta = 0.9$ für die angegebenen Startwerte und die Funktionen

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (1.5 - x(1-y))^2 + (2.25 - x(1-y^2))^2 + (2.625 - x(1-y^3))^2, \\
&\quad x^{[0]} = (0,-3)^\top,\ x^\star = (3, 0.5)^\top,\ f(x^\star) = 0, \\
g(x,y) &= (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2, \\
&\quad x^{[0]} = (4, 2.5)^\top,
\end{aligned}$$

und analysieren Sie die Ergebnisse im Hinblick auf Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit. Betrachten Sie insbesondere die Quotienten

$$\frac{\|x^{[i+1]} - x^\star\|}{\|x^{[i]} - x^\star\|} \qquad \text{und} \qquad \frac{\|x^{[i+1]} - x^\star\|}{\|x^{[i]} - x^\star\|^2}.$$