Prof. Dr. M. Hinze SoSe 2010

Dr. J.Sternberg-Kaletta

Übungen zur Vorlesung Optimierung

Blatt 5

Abgabetermin: Theoretische Aufgaben 14.05.2010 vor der Übung. Vorführung Numerik 20.05.2010, 16.00 in GEOM 142

Aufgabe 15: (Punkte 4) Das Abstiegsverfahren erzeugt zulässige Schrittweiten $t_k \Longleftrightarrow$

$$f(x^k + t_k d^k) \leq f(x^k) \qquad \forall k \geq 0$$
$$f(x^k + t_k d^k) - f(x^k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{|d^k|} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Das Abstiegsverfahren erzeugt zulässige Suchrichtungen $d_k \Longleftrightarrow$

$$\nabla f(x^k)^T d^k < 0 \qquad \forall k \geq 0 \text{ (Abstieg)}$$
$$\frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{|d^k|} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \nabla f(x^k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Das Abstiegsverfahren mit STOP $\Longleftrightarrow$ $\nabla f(x^k) = 0$ terminiere nicht endlich und erzeuge zulässige Suchrichtungen und Schrittweiten. Zeigen Sie, dass dann $\lim \nabla f(x^k) = 0$ gilt und jeder Häufungspunkt von $\{x^k\}_{k\in I\!N}$ ein stationärer Punkt von f ist.

Aufgabe 16:(6 Punkte (2+2+2)) (Unzulässige Schrittweiten durch die Armijo-Regel) Wir betrachten das allgemeine Abstiegsverfahren mit stetig differenzierbarer Zielfunktion $f : I\!R^n \to I\!R$ und Suchrichtungen $d^k = -2^{-k}\nabla f(x^k)$.

a) Weisen Sie nach, dass die Suchrichtungen d^k zulässig sind

b) Zeigen Sie, dass die Armijo-Regel für die oben genannten Suchrichtungen im allgemeinen keine zulässige Schrittweiten erzeugt. Verwenden Sie hierfür das Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2}{8}, \quad \text{Startpunkt } x^0 > 0$$

c) Wodurch wird die Unzulässigkeit der Schrittweiten verursacht?

Aufgabe 17: (4 Punkte (2+2))

a) Zeigen Sie, dass falls f eine konvexe quadtratische Funktion darstellt, dann ist sie auch nach unten beschränkt.

b) Sei $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix, deren kleinster und grösster Eigenwerte sind λ_s und λ_l. Beweisen Sie, dass für jeden $z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda_l^{-1}\|z\|^2 \leq z^\top H^{-1} z \leq \lambda_s^{-1}\|z\|^2.$$

Aufgabe 18: (4 Punkte) Sei $f : I\!R^n \to I\!R$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie:
Sind x^* und x^{**} zwei Häufungspunkte einer durch das allgemeine Abstiegsverfahren erzeugten Folge $\{x^k\}_{k\in I\!N}$, dann gilt: $f(x^*) = f(x^{**})$.

Numerische Aufgabe: Sei

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

die Rosenbrock'sche Bananenfunktion. Berechnen Sie $\nabla f(x)$ und $D^2 f(x)$. Berechnen Sie das Minimum numerisch mit Hilfe von Abstiegsverfahren mit

a) $d = -\nabla f(x)$) unter Verwendung der Armijo Regel,

b) wie a), jedoch unter Verwendung der Wolfe-Powell Schrittweiten Strategie,

c) $d = -D^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$, wobei anstelle der Armijo Regel auch die feste Schrittweite $t = 1$ gewält werden kann.

Starten Sie am Punkt $x^0 = (-1.2, 1.0)^t$. Terminieren Sie Ihren Algorithmen, falls $\left|\nabla f(x^k)\right| \leq \epsilon \left|\nabla f(x^0)\right|$ mit $\epsilon = 10^{-3}$ erfüllt ist. Geben Sie die Anzahl der Iterationen zusammen mit der Norm des Gradienten und dem Funktionswert f aus. Stellen Sie die Funktion $f(x_1, x_2)$ mit einem Grafikprogramm Ihrer Wahl dar. Stellen Sie ferner den Weg (Polygonzug) der Optimierungsverfahren in einem Niveauliniendiagramm von f dar.