III. Die Determinante

§ 13 Definition der Determinante

13.1 Motivation I: Algebra

Wir suchen eine algebraische Abbildung

$$\det : M(n,K) \to K$$

mit den Eigenschaften

(i) $\det(A) \neq 0 \iff A$ ist invertierbar

(ii) $\det(E) = 1$

"Algebraisch" heißt, dass det ein Polynom in den Einträgen a_{ij} von A und mit Koeffizienten in K sein soll, d.h. von der Form $\lambda_1 a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_r j_r} + \lambda_2 a_{k_1 l_1} a_{k_2 l_2} \cdots a_{k_s l_s} + \ldots$ (endl. Ausdruck) mit $\lambda_i \in K$.

$n=2$: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$ leistet das Gewünschte:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nicht invertierbar $\Longrightarrow \exists \lambda, \mu \in K \; \exists \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in K^2 : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\Rightarrow ad - bc = (\lambda u)(\mu v) - (\lambda v)(\mu u) = 0.$

$n=3$: $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} := a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$ leistet das Gewünschte.

Schema:
$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} + \\ - \end{array}$$

Bew: ?, $n > 3$: ??

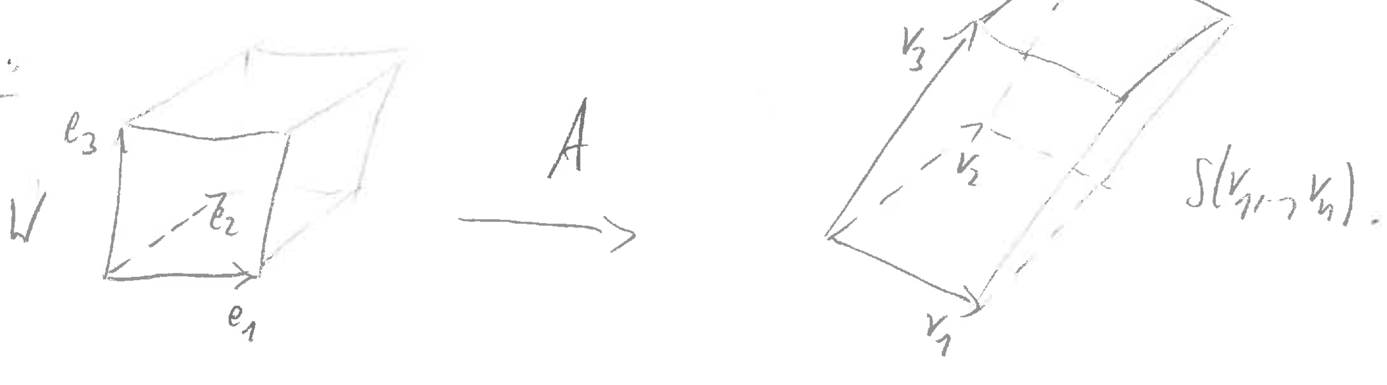
13.2 | Motivation II: Geometrie

Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.

Def: Sind $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, so heißt
$$S(v_1, \dots, v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\middle|\; 0 \le \lambda_i \le 1 \right\}$$
der von $v_1, \dots, v_n$ aufgespannte Spat. (Ausgeartet, falls $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig)

Bem: Ist A die Matrix mit Spalten $v_1, \dots, v_n$, so gilt
$$S(v_1, \dots, v_n) = A(W),$$
$W := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \;\middle|\; 0 \le \lambda_i \le 1 \right\}$ der Einheitswürfel.

$n=3$:



$|\det(A)|$ berechne das <u>Volumen</u> von $S(v_1,\dots,v_n)$!

Als mathematische Definition taugt dies solange nicht, wie der Volumenbegriff nicht streng definiert ist. Dieser ist in der Tat nicht ganz unproblematisch (↗ Maßtheorie; Banach-Tarski-Paradoxon). Zur eindeutigen Definition der Determinante reichen aber die folgenden, für ("orientierte") <u>Volumina</u> intuitiv richtigen Eigenschaften:

$$\det : M(n,\mathbb{R}) = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1,\dots,v_n) \mapsto \underset{\text{"Orientierung"}}{\pm} \text{"}\mathrm{vol}(S(v_1,\dots,v_n))\text{"}$$

(iii) <u>Normierung:</u> $\det(E) = \det(e_1,\dots,e_n) = 1.$

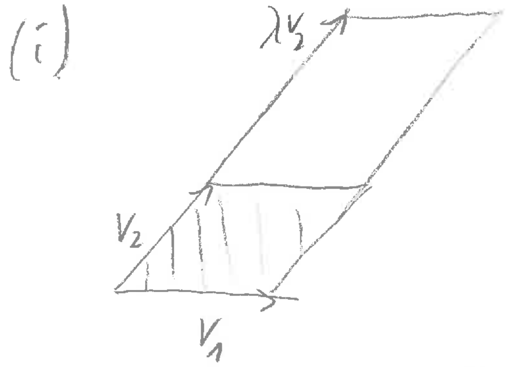
(i) <u>Homogenität:</u> $\forall v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n\ \forall i\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

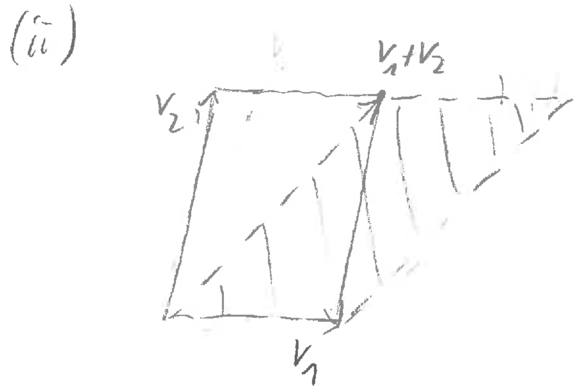
$$\det(v_1,\dots,v_{i-1},\lambda v_i, v_{i+1},\dots,v_n) = \lambda \cdot \det(v_1,\dots,v_n).$$

(ii) <u>Scherungsinvarianz:</u> $\forall v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n\ \forall i \neq j$

$$\det(v_1,\dots,v_{i-1},v_i+v_j,v_{i+1},\dots,v_n) = \det(v_1,\dots,v_n).$$

<u>Bilder (n=2):</u>





(↗ "Cavalierisches Prinzip")

13.3 | Zum weiteren Vorgehen

Homogenität und Scherungsinvarianz implizieren, dass det linear in jeder Komponente („multilinear“) ist und dass det verschwindet, sobald zwei Einträge gleich sind („alternierend“). Wir beweisen dies allgemeiner für Abbildungen $V^n \to K$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Hauptresultat wird sein, dass solche „alternierenden n-Multilinearformen“ einen eindimensionalen Vektorraum bilden (Satz 13.7). Für $V = K^n$ definiert die Normierungsbedingung $\det(E) = \det(e_1, \dots, e_n) = 1$ die Determinante dann eindeutig.

13.4 | Multilinearität und Alterniertheit

Lemma: Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und

$$\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n\text{-mal}} \longrightarrow K \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Homogenität: $\forall \lambda \in K \ \forall v_1, \dots, v_n \in V \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda\, \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

(ii) Scherungsinvarianz: $\forall v_1, \dots, v_n \in V \ \forall i \neq j$

$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots, v_n) = \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n).$$

Dann gilt:

1) $\forall v_1,\dots,v_n \in V\ \forall i \neq j\ \forall \lambda \in K$ (Verallgemeinerte Scherungsinvarianz).

$$\alpha(v_1,\dots,v_n) = \alpha(v_1,\dots,v_{i-1}, v_i+\lambda v_j, v_{i+1},\dots,v_n)$$

2) $v_1,\dots,v_n \in V$ linear abhängig $\Rightarrow \alpha(v_1,\dots,v_n)=0$.

3) α ist <u>multilinear</u>, d.h. für $i \in \{1,\dots,n\}$ und $v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n \in V$ fest gewählt ist

$$V \longrightarrow K, \quad v \longmapsto \alpha(v_1,\dots,v_{i-1},v,v_{i+1},\dots,v_n)$$

K-linear.

<u>Bew</u>: 1) o.E. $\lambda \neq 0$.

$$\alpha(v_1,\dots,v_n) \overset{(i)}{=} \lambda^{-1}\cdot\alpha(v_1,\dots,v_i,\dots,\lambda v_j,\dots,v_n)$$

$$\overset{(ii)}{=} \lambda^{-1}\cdot\alpha(v_1,\dots,v_i+\lambda v_j,\dots,\lambda v_j,\dots,v_n)$$

$$\overset{(i)}{=} \alpha(v_1,\dots,v_i+\lambda v_j,\dots,v_j,\dots,v_n).$$

2) $v_1,\dots,v_n$ linear abhängig $\Rightarrow \exists i$ und $\lambda_j \in K, j\neq i$: $v_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j v_j = 0$

$(n-1)$-maliges Anwenden von (1) liefert

$$\alpha(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n) \overset{(1)}{=} \alpha(v_1,\dots,v_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j v_j,\dots,v_n)$$

$$= \alpha(v_1,\dots,v_{i-1},\underset{\underset{0\cdot v_i}{\parallel}}{0},v_{i+1},\dots,v_n) \overset{(i)}{=} 0$$

(3.6)

3) Wegen (i) müssen wir nur zeigen:

$$\forall v,w \in V \quad \alpha(v_1,\dots,\underset{\overset{\uparrow}{i}}{v+v'},\dots,v_n) = \alpha(v_1,\dots,v,\dots,v_n) + \alpha(v_1,\dots,v',\dots,v_n). \quad (*)$$

<u>Fall 1:</u> $v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n$ sind linear abhängig.

$(*)$ gilt dann nach (2): $0 = 0+0$.

<u>Fall 2:</u> $v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n$ sind linear unabhängig.

$\dim V = n \Rightarrow \exists v_i \in V:\ v_1,\dots,v_n$ ist eine Basis.

$$\Rightarrow \exists u,u' \in L(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)\ \exists \lambda,\lambda' \in K: \quad \begin{aligned} v &= u + \lambda\cdot v_i \\ v' &= u' + \lambda'\cdot v_i. \end{aligned}$$

Wie im Bew. von (2) lassen sich Summanden aus $L(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)$ an der i-ten Stelle durch sukzessives Anwenden von (1) beseitigen:

$$\begin{aligned} \alpha(v_1,\dots,\underset{\overset{\uparrow}{i}}{v+v'},\dots,v_n) &= \alpha(v_1,\dots,(u+u')+(\lambda+\lambda')\cdot v_i,\dots,v_n) \\ &\overset{(1)}{=} \alpha(v_1,\dots,(\lambda+\lambda')v_i,\dots,v_n) \\ &= (\lambda+\lambda')\,\alpha(v_1,\dots,v_n). \qquad [1] \end{aligned}$$

Analog sieht man:

$$\alpha(v_1,\dots,v,\dots,v_n) = \lambda\cdot\alpha(v_1,\dots,v_n) \qquad [2]$$

$$\alpha(v_1,\dots,v',\dots,v_n) = \lambda'\cdot\alpha(v_1,\dots,v_n). \qquad [3]$$

[1]-[3] zeigen $(*)$. $\square$

<u>Bem</u>: a) (2) impliziert, dass $\alpha(v_1, \dots, v_n) = 0$, falls zwei der $v_1, \dots, v_n$ übereinstimmen. Eine multilineare Abbildung mit dieser Eigenschaft heißt <u>alternierend</u>. Solche Abbildungen wechseln das Vorzeichen beim Vertauschen von v_i mit v_j, $i \neq j$:

$$0 = \alpha(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) = \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

b) (2) impliziert auch, dass $L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ im Kern der Linearform in (3) <u>liegt</u>.

c) $V = \mathbb{R}^n$, $A = (v_1, \dots, v_n)$, so bedeutet (1) Invarianz von α unter Spaltentrf. von Typ II.

13.5 Alternierende k-Multilinearformen

Nach Lemma 3.4 gehört die Determinante zum Spezialfall $V = K^n$, und $n = k$ der folgenden Klasse von Abbildungen:

<u>Def</u>: Sei V ein K-Vektorraum. Eine <u>k-Multilinearform</u> auf V ist eine Abbildung

$$\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \longrightarrow K,$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Vektorraum } \mathrm{Mult}^k(V)}$

die linear in jedem Eintrag ist:

$\forall i \in \{1, \dots, k\}\ \forall v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k \in V$:

$$V \longrightarrow K, \quad v \longmapsto \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

ist linear.

Sie heißt <u>alternierend</u>, falls

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Vektorraum } \mathrm{Alt}^k(V)}$

$$\forall v_1, \dots, v_n \in V\ \forall i \neq j \quad v_i = v_j \Rightarrow \alpha(v_1, \dots, v_n) = 0.$$

13.6 Bsp: a) 1-Multilinearformen = Linearformen.

b) 2-Multilinearformen =: <u>Bilinearformen</u> ($\nearrow$ LA II).

$V = K^n$, so lassen sich diese wie folgt schreiben:

$$K^n \times K^n \to K, \quad (v,w) \mapsto v^t \cdot A \cdot w$$

mit $A \in M(n,K)$.

<u>Etwa</u>: $\det : M(2,K) = K^2 \times K^2 \to K, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc = (a\ c) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

[Aus dieser Darstellung sieht man leicht die Multilinearität von det für $n=2$:

$$\begin{aligned} \det(\lambda v + \lambda' v', w) &= (\lambda v + \lambda' v')^t \cdot A \cdot w \\ &= (\lambda \cdot v^t + \lambda' (v')^t) \cdot A \cdot w \\ &= \lambda \cdot (v^t \cdot A \cdot w) + \lambda' \cdot ((v')^t \cdot A \cdot w). \end{aligned}$$

Analog im zweiten Eintrag.]

<u>Vorsicht</u>: Wir haben <u>keine</u> Linearität als Abbildung des K-Vektorraums $M(2,K)$ nach K:

z.B. $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 + 0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13.7 <u>Multilinearformen auf K^n</u>

Analog zur Darstellung von Linearformen $\alpha \in (K^n)^*$ durch $\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n) \in K$ lassen sich k-Multilinearformen durch eine Anzahl von Skalaren beschreiben, nämlich die Auswertungen auf den Tupeln $(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k})$. (liefert "$k$-dimensionale Matrizen")

Satz: Die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Mult}^k(K^n) \longrightarrow \mathrm{Map}(\{1, \dots, n\}^k, K)$$
$$\alpha \longmapsto \left((\mu_1, \dots, \mu_k) \longmapsto \alpha(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}) \right)$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

↗ Übung ↘

Bew: Φ ist linear: Klar.

Φ ist injektiv: Sei $\alpha \in \mathrm{Mult}^k(\mathbb{R}^n)$ und $\forall (\mu_1, \dots, \mu_k) : \alpha(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}) = 0$.

Dann gilt: $\alpha = 0$, d.h. $\forall v_1, \dots, v_k \in V \quad \alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Sei nämlich $v_i = \sum_{\mu=1}^{n} \lambda_{\mu i} e_\mu$, so gilt

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = \alpha\left(\sum_{\mu=1}^{n} \lambda_{\mu 1} e_\mu, \dots, \sum_{\mu=1}^{n} \lambda_{\mu k} e_\mu \right)$$

$$\overset{\text{Linearität im ersten Eintrag}}{=} \sum_{\mu_1=1}^{n} \lambda_{\mu_1 1} \, \alpha\left(e_{\mu_1}, \sum_{\mu_2=1}^{n} \lambda_{\mu_2 2} e_{\mu_2}, \dots, \sum_{\mu_k=1}^{n} \lambda_{\mu_k k} e_{\mu_k}\right)$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{\mu_1=1}^{n} \sum_{\mu_2=1}^{n} \dots \sum_{\mu_k=1}^{n} \lambda_{\mu_1 1} \lambda_{\mu_2 2} \cdots \lambda_{\mu_k k} \, \alpha(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_k}) = 0.$$

Φ ist surjektiv: Sei $a : \{1, \dots, n\}^k \to K$, $(\mu_1, \dots, \mu_k) \longmapsto a_{\mu_1 \dots \mu_k}$

Definiere

$$\boxed{\alpha\Big(\sum_{\mu_1}\lambda_{\mu_1 1}e_{\mu_1},\dots,\sum_{\mu_k}\lambda_{\mu_k k}e_{\mu_k}\Big) := \sum_{\mu_1}\dots\sum_{\mu_k}\lambda_{\mu_1 1}\dots\lambda_{\mu_k k}\cdot a_{\mu_1\dots\mu_k}}$$

α ist linear im i-ten Eintrag, $i=1,\dots,k$:

$$\alpha\Big(\sum_{\mu_1}\lambda_{\mu_1 1}e_{\mu_1},\dots,\sum_{\mu_k}\lambda_{\mu_k k}e_{\mu_k}\Big) = \sum_{\mu_i}\overbrace{\Big(\sum_{\mu_1,\dots,\hat{\mu}_i,\dots,\mu_k}\lambda_{\mu_1 1}\dots\hat{\lambda}_{\mu_i i}\dots\lambda_{\mu_k k}\,a_{\mu_1\dots\mu_k}\Big)}^{\in K\ (\lambda_{\mu_j j}\text{ fest für } j\neq i)}\lambda_{\mu_i i}$$

Hierbei bedeutet " $\wedge$ ", dass die betreffende Größe fortzulassen ist.

Es gilt $\Phi(\alpha) = a$:

$$\alpha(e_{\mu_1},\dots,e_{\mu_k}) = a_{\mu_1\dots\mu_k}, \quad \text{denn } \overset{\text{für } v_i = e_i:}{\lambda_{\mu i}} = \delta_{i\mu} = \begin{cases} 1, & \mu = i\\ 0, & \mu \neq i\end{cases}.$$

$\square$

Kor: $\dim V = n \Rightarrow \dim \mathrm{Mult}^k(V) = \dim \mathrm{Mult}^k(K^n) = n^k$.

Bsp: $M(2,K) = \mathrm{Mult}^2(K^2)$: (vgl. Bsp. 13.6, b)

$$A = \begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix} \longmapsto \left(\left(\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{aligned}&\lambda_{11}\cdot ab\\ +&\lambda_{12}\cdot ad\\ +&\lambda_{21}\cdot cb\\ +&\lambda_{22}\cdot cd\end{aligned}\right).$$

Bem: Eine k-Multilinearform auf K^n ist also ein Polynom in den n Einträgen von k (unbestimmten) Vektoren $v_1,\dots,v_k$, in dem jeder Summand ein Produkt $\lambda_{\mu_1 1}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\mu_k 1}$ mit genau einem Eintrag von jedem v_i ist.

13.8 | Alternierende k-Multilinearformen auf K^n

$\alpha(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k})$ ist bestimmt durch $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, $i_1 < \dots < i_k$, $\{i_1, \dots, i_k\} = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$. Betrachte daher

$$P_k^n := \{ A \subset \{1, \dots, n\} \mid |A| = k \} \xrightarrow{\text{inj.}} \mathrm{Map}(\{1, \dots, n\}^k, K)$$

$$A = \{\mu_1, \dots, \mu_k\} \longmapsto (\mu_1, \dots, \mu_k)$$

$$\mu_1 < \dots < \mu_k$$

Analog zu Satz 13.7 kann man zeigen:

Satz: Die Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Alt}^k(K^n) \longrightarrow \mathrm{Map}(P_k^n, K), \quad \alpha \longmapsto \left(\{\mu_1, \dots, \mu_k\} \longmapsto \alpha(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}) \right)$$

$$\mu_1 < \dots < \mu_k$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere gilt:

$$\dim \mathrm{Alt}^k(K^n) = \binom{n}{k}.$$

(o.Bew.) Wir brauchen nur den Fall $k=n$:

13.9 | Alternierende n-Multilinearformen auf K^n

Satz: Die lineare Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Alt}^n(K^n) \longrightarrow K, \quad \alpha \longmapsto \alpha(e_1, \dots, e_n)$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Bew: Wir werden sehen ($\to$ ...) :

Es gibt einen Homomorphismus (von Gruppen)

$$\mathrm{sgn}: S_n = \mathrm{Bij}(\{1,\dots,n\}) \longrightarrow (\{-1,1\},\cdot) \qquad (\underline{\text{Signum}})$$

mit der Eigenschaft

$$\alpha \in \mathrm{Alt}^n(K^n),\ v_1,\dots,v_n \in V,\ \sigma \in S_n \Rightarrow \boxed{\alpha(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\alpha(v_1,\dots,v_n)}.$$

Dies zeigt:

$$\alpha(e_{\mu_1},\dots,e_{\mu_n}) = \begin{cases} 0 & , (i \mapsto \mu_i) \notin S_n \\ \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\alpha(e_1,\dots,e_n) & , \text{sonst; } \sigma := (i \mapsto \mu_i) \in S_n. \end{cases}$$

Demnach ist <u>Ψ injektiv</u> <u>nach Satz 3.7.</u>

<u>Ψ ist surjektiv:</u> Sei $a \in K$.

Definiere

$$a_{\mu_1\dots\mu_n} := \begin{cases} 0 & , (i \mapsto \mu_i) \notin S_n \\ \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot a & , \sigma := (i \mapsto \mu_i) \in S_n. \end{cases}$$

Sei α die nach Satz 3.7 zugehörige Multilinearform ($\alpha(e_{\mu_1},\dots,e_{\mu_n}) = a_{\mu_1\dots\mu_n}$).

Es bleibt zu zeigen: α ist alternierend.

Seien $v_1 = \sum \lambda_{1\mu} e_\mu, \dots, v_n = \sum \lambda_{n\mu} e_\mu \in V$ und $v_i = v_j$ für $i < j$.

Betrachte $\tau \in S_n$ mit $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ und $\tau(\mu) = \mu$ für $\mu \neq i,j$. Es gilt: $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.

Mit $A_n := \ker(\mathrm{sgn})$ gilt $S_n = A_n \,\dot\cup\, (A_n \circ \tau)$, denn (1.13)

$\sigma \in S_n$, $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1 \iff \mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \mathrm{sgn}(\tau) = -\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$!

$\iff \sigma\circ\tau \in A_n \iff \sigma = \sigma\circ\tau^2 \in A_n \circ \tau$.

Wir erhalten

$$\alpha(v_1,\dots,v_n) = \sum_{\sigma\in A_n} \lambda_{1,\sigma(1)}\cdots\lambda_{n,\sigma(n)}\,\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot a + \sum_{\sigma\in A_n}\lambda_{1,\sigma\tau(1)}\cdots\lambda_{n,\sigma\tau(n)}\cdot\mathrm{sgn}(\sigma\tau)\cdot a$$

$$= \sum_{\sigma\in A_n} \lambda_{1,\sigma(1)}\cdots\lambda_{n,\sigma(n)}\,\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot a - \sum_{\sigma\in A_n}\lambda_{1\sigma(1)}\cdots\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\lambda_{i\sigma(j)}}\cdots\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{\lambda_{j\sigma(i)}}\cdots\lambda_{n\sigma(n)}\,\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot a = 0,$$

denn $\lambda_{i\sigma(j)} = \lambda_{j\sigma(j)}$ und $\lambda_{j\sigma(i)} = \lambda_{i\sigma(i)}$ (wegen $v_i = v_j$). $\square$

13.10 Definition der Determinante

Def: Die (n-dimensionale) Determinante ist die nach dem Satz eindeutige alternierende n-Multilinearform

$$\det : K^n \times \dots \times K^n \to K$$

mit $\det(e_1,\dots,e_n) = 1$.

Notation: $A = (v_1 \dots v_n) \in M(n,K)$, dann

$$\det(A) := \det(v_1,\dots,v_n) \quad (\text{auch: } |A|).$$

Merke: (n-dim.) Determinante = normierte, alternierende n-Multilinearform auf K^n

Bem: det erfüllt (i)-(iii) in 13.2.

13.11 **Formel** (Leibnizformel) ($\nearrow$ Bew. v. Satz 13.9 "surjektiv")

Ist $A = (a_{ij}) \in M(n, K)$, so gilt

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$$

Bem: Diese Formel hat $n!$ Terme und ist daher für $\underbrace{n > 3}_{(n=3:\ \text{vgl. } 3.2)}$ zur Berechnung schlecht geeignet. Es ist aber oft wichtig, dass $\det(A)$ differenzierbar oder sogar polynomial von den a_{ij} abhängt.

$\nearrow$ Blatt 14, Aufg. 4