II. Matrizenrechnung

§9. Lineare Gleichungssysteme

9.1| Bsp: Finde $x_1, x_2, x_3 \in K$ mit

$$(1) \quad 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 3$$
$$(2) \quad 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 3$$
$$(3) \quad 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \quad !$$

9.2| Def: Ein <u>lineares Gleichungssystem</u> (LGS) mit Koeffizienten in K ist ein System von Gleichungen der Form

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad [9.2]$$
$$\vdots$$
$$(m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m ,$$

wobei $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in K$ und $x_1, \dots, x_n$ Unbekannte sind.

Es heißt <u>homogen</u>, falls $b_1 = \dots = b_m = 0$, sonst <u>inhomogen</u>.

Eine <u>Lösung</u> ist ein Tupel $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$, so dass (1)–(m) mit $x_1 = \xi_1, \dots, x_n = \xi_n$ erfüllt sind.

9.3 Formulierung durch lineare Abbildungen

Zum LGS [9.2] betrachte die lineare Abbildung

$$\varphi: K^n \to K^m, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}\lambda_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}\lambda_j\right). \qquad [9.3]$$

Es gilt: $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$ löst [1.2] $\Leftrightarrow$ $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = (b_1, \dots, b_m)$.

Dies ermöglicht das Studium linearer Gleichungssysteme durch lineare Abb'en.
$K^n \to K^m$, n = # Unbekannte, m = # Gleichungen.

9.4 Lineare Abbildungen $K^n \to K^m$

Jede lineare Abb. $\varphi: K^n \to K^m$ ist von der Form [9.3], gehört also zu LGS'en der Form [9.2] (mit noch zu gebenden $(b_1, \dots, b_m) \in K^m$).

Satz: Sei $\varphi: K^n \to K^m$ K-linear. Dann existieren a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, mit der Eigenschaft:

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n: \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}\lambda_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}\lambda_j\right).$$

Bew: (vgl. 7.12, a und b für $n=1$ bzw. $m=1$)

Für $j = 1, \dots, n$ definiere $a_{1j}, \dots, a_{mj} \in K$ durch

$$\varphi(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{mj}).$$

Dann gilt

$$\varphi(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\Big) \overset{\varphi \text{ linear}}{=} \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(e_j)$$
$$= \sum_{j=1}^n \lambda_j (a_{1j},\dots,a_{mj}) = \Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}\lambda_j,\dots,\sum_{j=1}^n a_{mj}\lambda_j\Big). \qquad \square$$

9.5 Matrizen

$\varphi: K^n \to K^m$ wird $\overbrace{}^{\text{nach Satz 9.4}}$ durch $m\cdot n$ Skalare $a_{ij}\in K$ gegeben.

Def.: Eine <u>$(m\times n)$-Matrix</u> mit Einträgen in einem Ring R ist eine Abbildung $A: \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\} \to R$.

$M(m\times n, R)$ = Menge solcher Matrizen. $M(m\times n, K)$ ist K-Vektorraum $\cong K^{mn}$ $(\to 7.6)$

Schreibweise:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} = (a_{ij})$$

<u>i-te Zeile:</u> $(a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in})$

<u>j-te Spalte:</u> $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

Merke: Erst Zeilen-, dann Spaltenindex!

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Transponierte Matrix</u> zu $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$: $A^t := (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$

9.6 **Bsp:** ($\nearrow$ 9.1) $\varphi: K^3 \to K^3$,

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3,\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_3,\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3)$$

liefert $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, K)$.

//

9.7 **Spaltenvektoren**

Im Matrizenkalkül ist es praktisch ($\nearrow$ Matrizenprodukt) und üblich, Vektoren spaltenweise zu schreiben, d.h. wir identifizieren K^n mit $M(n \times 1, K)$.

Die zu $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ $\overset{\text{nach 9.4.}}{\checkmark}$ gehörige lineare Abbildung $K^n \to K^m$ ist dann

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1n}\lambda_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \dots + a_{mn}\lambda_n \end{pmatrix} \in K^m.$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 0 - 7 \\ 3 + 0 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Merke: $\boxed{j\text{-te Spalte von } A = \text{Bild von } e_j}$

Notationsmissbrauch: Wir identifizieren lineare Abbildungen $K^n \to K^m$ mit $(m\times n)$-Matrizen und schreiben $A: K^n \to K^m$, $\ker(A)$ etc.

9.8 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Für $A \in M(m\times n, K)$, $b \in K^m$ sei

$$\mathbb{L} = \{u \in K^n \mid Au = b\}$$

die Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems.

Satz: Entweder gilt $\mathbb{L} = \emptyset$,

oder $\mathbb{L} = u + \ker(A)$, wobei $u \in \mathbb{L}$ eine Lösung ist.

Bew: $\mathbb{L} = \emptyset \iff b \notin \operatorname{im}(A)$.

Andernfalls sei $u \in \mathbb{L}$ beliebig. Ist dann $u' \in K^n$, so gilt

$$A \cdot u' = b$$

$$\iff A \cdot u' = A \cdot u$$

$$\iff A \cdot (u' - u) = 0$$

$$\iff u' - u \in \ker(A).$$

$\square$

Bem: Ist V ein K-VR, so heißt eine Teilmenge von V der Form $u + U$ mit $u \in V$, $U < V$ ein Unterraum ein affiner Unterraum.

→ Parallelverschiebung.

9.9 Bsp: In 9.1 & 9.6: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung, $\ker(A) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Demnach $\mathbb{L} = u + \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -1+4\lambda \\ 1-3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

9.10 Zeilentransformationen

Folgende Operationen ändern nicht die Lösungsmenge eines LGS

$(1) \dots$
$\vdots$
$(m) \dots$

(I) Multiplikation einer Gleichung mit $\lambda \in K^*$: $(i) \longrightarrow \lambda \cdot (i)$

(II) Addition von Vielfachen einer andren Gleichung: $(i) \longrightarrow (i) + \lambda \cdot (j)$, $\lambda \in K$, $j \neq i$

(III) Vertauschen zweier Gleichungen: $\begin{matrix}(i) \\ (j)\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}(j) \\ (i)\end{matrix}$

Die entsprechenden Umformungen der zugehörigen Matrix A heißen (elementare) Zeilentransformationen (wir notieren nur die sich ändernden Zeilen):

(I) $(i) \to \lambda(i)$

$$\begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

(II) $(i) \to (i) + \lambda(i')$

$$\begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & \cdots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

III)

$$\begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$$

9.11 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Satz: Jede Matrix $(a_{ij})_{ij} \in M(m \times n, K)$ lässt sich durch endlich viele Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen, d.h.

$$(a_{ij})_{ij} \longrightarrow (a'_{ij})_{ij}$$

$$(a'_{ij})_{ij} = \begin{array}{r} \\ 1 \to \\ 2 \to \\ \\ \vdots \\ k \to \\ k+1 \to \\ \vdots \\ m \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ m-k \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & & j_1 & & & j_2 & & & j_3 & \cdots & j_k & & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & & & & & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$*$: unbestimmte Einträge

<u>Bew / Verfahren</u>: $\nearrow$ 9.14.

9.12 Anwendung 1: Lösen linearer Gleichungssysteme

Für $A \in M(m \times n, K)$, $b \in K^m$ löse $\boxed{Ax = b}$ (LGS)!

Wende Satz 9.11 auf die erweiterte Matrix $(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$ an!

Resultat: $(A'|b')$ mit Stufen für $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$. (Evtl. hat man noch eine Stufe in $(n+1)$ter Spalte)

Seien $r_1 < \ldots < r_{n-k}$ die verbleibenden Indizes.

Es gilt: $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ löst (LGS)

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} \xi_j = b'_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} \xi_j = b'_i, \quad i = 1, \ldots, k$$

$$\wedge \; b'_{k+1} = \ldots = b'_m = 0$$

$$\Longleftrightarrow \xi_{j_i} + \sum_{\nu=1}^{n-k} a'_{i r_\nu} \xi_{r_\nu} = b'_i, \quad i = 1, \ldots, k$$

$$\wedge \; b'_{k+1} = \ldots = b'_m = 0.$$

Ergebnis: (LGS) hat eine Lösung $\Longleftrightarrow b'_{k+1} = \ldots = b'_m = 0$

und in diesem Fall: $\xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_{n-k}} \in K$ frei wählbar (parametrisieren ker (A))

$\wedge \; \xi_{j_i} = b'_i - \sum_{\nu=1}^{n-k} a'_{i r_\nu} \xi_{r_\nu}$

9.13 Bsp (vgl. 9.1, 9.6)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)\leftrightarrow(1)]{(2)\to\frac{1}{3}\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)\to(3)-2\cdot(1)]{(2)\to(2)-2\cdot(1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\to(1)-2\cdot(2)} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} j_1 & j_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow k=2 \\ \\ = b_3' \text{ zeigt: LGS lösbar} \end{array}$$

$A'x = b'$:
$$x_1 \qquad -4x_3 = -1$$
$$x_2 + 3x_3 = 1$$

$j_1 = 1, j_2 = 2$ zeigt: $x_3 = \lambda$ ist ein freier Parameter, $\quad x_1 = -1 + 4\lambda$, $\; x_2 = 1 - 3\lambda$

Liefert wieder: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1+4\lambda \\ 1-3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Bem: Eine Basis für $\ker(A)$ erhält man durch Lösen von $A'x = 0$ mit Parametern $(\xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_{n-k}}) = e_1, \ldots, (\xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_{n-k}}) = e_{n-k}$.

Im Bsp: $n-k = 1$, $\ker(A) = L((4,-3,1))$.

9.14 Bew. von Satz 9.11 / Rechenverfahren

$j_1 := \min\{ j \in \{1, .., n\} \mid \exists i : a_{ij} \neq 0 \}$ (kleinster Index j s.d. j-te Spalte $\neq 0$)

j_1-te Spalte: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{ij_1} \\ * \\ \vdots \end{pmatrix}$. Sei i_1 so, dass $a_{i_1 j_1} \neq 0$.

Verfahren: 1. Herunterbringen: Tausche $(1) \longleftrightarrow (i_1)$

2. Normieren: $(1) \longrightarrow a_{i_1 j_1}^{-1} \cdot (1)$.

Liefert $(\tilde{a}_{ij})$ mit $\tilde{a}_{1j_1} = 1$, $\tilde{a}_{1j} = 0$ für $j < j_1$

3. Ausräumen: $\forall i > 1: \; (i) \longrightarrow (i) - \tilde{a}_{1i} \cdot (1)$

Resultat:

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad j_1 \\ \qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ & & & 0 & * & \cdots & * \\ & & & \vdots & \vdots & A_1 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Verfahren wiederholen mit Matrix A_1 etc. (Induktion nach m).

Induktion bricht ab mit Nullmatrix oder mit letzter Zeile.

Resultat:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & & * & * \\ \vdots & & & & & & 1 & * & & \vdots & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & * & \\ & & & & & & & & & 1 & * \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Schließlich: Ausräumen der j_i-ten Spalten oberhalb von i.

Bem.: a) Programme, z.B. Maxima, GAP, Sage, Pari/GP, ..., Maple, Mathematica b) Eindeutigkeit der Zeilenstufenform

9.15 Anwendung 2 der G.-El.: Konstruktion einer Basis von $L(v_1, \dots, v_m)$

Schreibe $v_1, \dots, v_m \in K^n$ in die Zeilen der Matrix $A \in M(m \times n)$:

$$v_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}), \quad A = (a_{ij}).$$

Beachte: $A^t : K^m \to K^n$ ist die lineare Abb. mit $A^t e_i = v_i$, $i = 1, \dots, m$.
In A^t stehen die v_i in den Spalten!

2.11

Satz: Geht $A' \in M(m \times n, K)$ durch Zeilentransformationen aus A hervor, so gilt für $v_i' = (a_{i1}', \dots, a_{in}')$:

$$L(v_1', \dots, v_m') = L(v_1, \dots, v_m).$$

Bew: Wir müssen nur zeigen, dass sich der von den Zeilen aufgespannte Unterraum durch Zeilentransformationen nicht ändert:

(I) $(i) \to \lambda \cdot (i)$: $L(v_1, \dots, v_m) = L(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda \cdot v_i, v_{i+1}, \dots, v_m)$.

(II) $(i) \to (i) + \lambda \cdot (j)$: $L(v_1, \dots, v_m) = L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \lambda v_j, v_{i+1}, \dots, v_m)$.

(III) $(i) \leftrightarrow (j)$: $L(v_1, \dots, v_m) = L(\{v_1, \dots, v_m\})$. □

$\left[\ \supseteq: \checkmark,\ \subseteq: \sum \lambda_\mu v_\mu = \sum_{\mu \neq i,j} \lambda_\mu v_\mu + \lambda_i v_i + \lambda_j v_j = \sum_{\mu \neq i,j} \lambda_\mu v_\mu + \lambda_i (v_i + \lambda v_j) + (\lambda_j - \lambda_i \lambda) v_j\ \right]$

Korollar: Ist A' in Zeilenstufenform mit k Stufen, so ist $v_1', \dots, v_k'$ eine Basis von $L(v_1, \dots, v_m)$.

Bew: noch z.z.: $v_1', \dots, v_k'$ sind linear unabhängig:

Für $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ gilt: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i' = (0, \dots, 0, \lambda_1, *, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, * \dots)$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ j_1 & j_2 & j_k \end{array}$$

Demnach: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i' = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. □

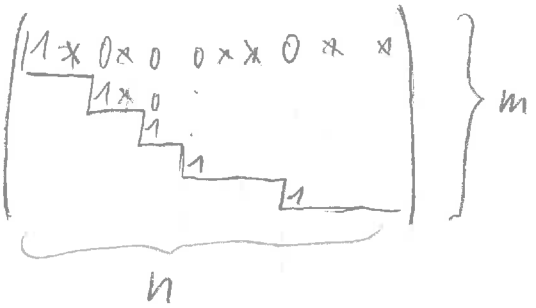
9.16 | Anwendung 3 der G.-El.: Lineare Unabhängigkeit – Erzeugendensystem

Wie in 9.15: $v_1, \dots, v_m \in K^n$ liefert die Zeilen von $A \in M(m \times n, K)$.

$\xrightarrow{\text{G.-El.}}$ A' in Zeilenstufenform.

Satz:
1) $v_1, \dots, v_m$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ keine Zeile von A' ist 0.
2) " erzeugen K^n $\Leftrightarrow$ jede Spalte von A' hat eine Stufe
3) " bilden eine Basis $\Leftrightarrow$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

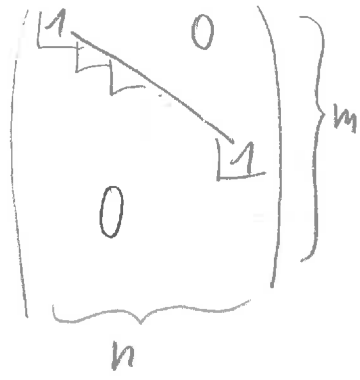
Bild: 1)



d.h. wir haben $\underline{m}$ Stufen.

Zeigt: $m \le n$. (vgl. Kor. 8.14, 1)

2)



d.h. wir haben $\underline{n}$ Stufen

Zeigt: $m \ge n$ (vgl. Kor. 8.14, 2).

Bew: (3) folgt aus (1) und (2)

(2) Satz 9.15: $L(v_1, \dots, v_m) = L(v_1', \dots, v_m')$ für v_i' aus den Zeilen von A'.

Jetzt mit Kor. 9.15 und Dimension argumentieren, oder wie folgt direkt:

"$\Leftarrow$": $A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Rightarrow L(v_1, \dots, v_m) = L(v_1', \dots, v_m')$
$= L(e_1, \dots, e_n) = K^n.$

"$\Rightarrow$": Setze $i := \min\{\mu \mid a_{\mu\mu} \neq 1\}$, d.h.

$$A' = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\quad i \\ \qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & * \\ & \ddots & & & a_{2i} & \\ & & & & \vdots & \\ & & & 1 & a_{i-1\,i} & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & * \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dann gilt $e_i \notin L(v_1', \dots, v_m')$:

Angenommen, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ und

$$e_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i' = \left(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}, \sum_{\mu=1}^{i} \lambda_\mu a_{\mu i}, \dots\right),$$

dann $\lambda_1 = \dots = \lambda_{i-1} = 0$, also auch $\sum \lambda_\mu a_{\mu i} = 0$ ↯.

Zum Bew. von (1) argumentiert man wieder mit Kor. 9.15 und Dimension oder direkt mit:

<u>Lemma</u>: Geht A' durch Zeilentransformationen aus $A \in M(m \times n, K)$ hervor, so gilt für die Zeilenvektoren:

$$v_1', \dots, v_m' \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow v_1, \dots, v_m \text{ linear abhängig.}$$

<u>Bew</u>: Klar für Trf. vom Typ I ($(i) \to \lambda \cdot (i)$, $\lambda \neq 0$) und III ($(i) \leftrightarrow (j)$).

<u>II</u>: $v_i' = v_i + \lambda v_j$. Demnach gilt für $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu v_\mu' = \Big(\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq j}}^{m} \lambda_\mu v_\mu\Big) + (\lambda_j + \lambda_i \lambda) v_j. \qquad (*)$$

"$\Rightarrow$": Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ mit $\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu v_\mu' = 0$ und $\exists \mu: \lambda_\mu \neq 0$.

Falls ein $\mu \neq j$ existiert mit $\lambda_\mu \neq 0$, so liefert (*) eine nicht-triviale Relation zwischen den v_μ.

Andernfalls: $0 = \lambda_j v_j' = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu v_\mu' \overset{(*)}{=} (\lambda_j + 0 \cdot \lambda) v_j = \lambda_j v_j$

Dies zeigt: $v_j = v_j' = 0$. $\square$

Bew. von Satz 9.16, a:

$v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig $\overset{\text{Lemma}}{\Longleftrightarrow}$ $v_1', \dots, v_m'$ linear unabhängig

$\overset{!}{\Longleftrightarrow}$ $\forall i: v_i' \neq 0$.

("$\Leftarrow$" Kor. 9.15) $\square$

9.17 Zusammenfassung:

Für $v_1, \dots, v_n \in K^m$ sei $A := (v_1 \dots v_n) \in M(m \times n, K)$, d.h. $A \cdot e_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$.

a) G.-El. für A $\longrightarrow$ Berechnung von $\ker(A)$.

b) G.-El. für $(A|b)$, $b \in K^m$ $\longrightarrow$ Lösen des LGS $Ax = b$.

c) G.-El. für A^t $\longrightarrow$ Bestimmung einer Basis für $L(v_1, \dots, v_n) = \operatorname{im}(A)$ bzw. Test auf lineare Unabhängigkeit / Erzeugnis.

Bem: Wir werden auch sehen, dass $v_{j_1}, \dots, v_{j_k}$ eine Basis für $L(v_1, \dots, v_n)$ sind, falls $j_1, \dots, j_k$ die Positionen der Stufen in (a) sind. (→ 11.8)

§10. Lineare Abbildungen und Matrizen

<u>Ziel:</u> Matrizenkalkül zum Arbeiten mit abstrakten linearen Abbildungen $\varphi: V \to W$.

10.1 Hom(V,W)

<u>Def:</u> Sind V, W K-Vektorräume, so bezeichne

$$\mathrm{Hom}(V,W) = \mathrm{Hom}_K(V,W)$$

den K-VR der linearen Abbildungen $V \to W$ mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation:

$$\forall \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V,W)\ \forall \lambda, \mu \in K\ \forall v \in V:\ (\lambda\cdot\varphi + \mu\cdot\psi)(v) := \lambda\cdot\varphi(v) + \mu\cdot\psi(v).$$

[in W].

10.2 Satz:

Die Abbildung

$$M(m\times n, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$$

$$A \longmapsto (A: K^n \to K^m)$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

<u>Bew:</u> bijektiv: Satz 9.4.

Linearität: ✓

□

10.3 Matrizen zu linearen Abbildungen, Basiswahl

Durch Wahl von Basen lassen sich beliebige lin. Abb. durch Matrizen darstellen:

Satz: Seien V, W K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ bzw. $\mathcal{B}'=(w_1,\dots,w_m)$ und $\Phi: K^n \to V$, $\Phi(e_i)=v_i$; bzw. $\Psi: K^m \to W$, $\Psi(e_j)=w_j$ die zugehörigen Isomorphismen. Dann ist

$$F: \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow M(m\times n, K)$$
$$\varphi \longmapsto \left(\Psi^{-1}\circ\varphi\circ\Phi : K^n \to K^m\right)$$

ein Isomorphismus.

Linearität: ✓

Bew: Die Umkehrabbildung ist $G: A \longmapsto \Psi\circ A\circ\Phi^{-1}$:

$$(G\circ F)(\varphi) = G(F(\varphi)) = G(\Psi^{-1}\circ\varphi\circ\Phi) = \Psi\circ(\Psi^{-1}\circ\varphi\circ\Phi^{-1})\circ\Phi$$
$$= (\Psi\circ\Psi^{-1})\circ\varphi\circ(\Phi^{-1}\circ\Phi) = \varphi.$$

$$(F\circ G)(A) = \Psi^{-1}\circ(\Psi\circ A\circ\Phi^{-1})\circ\Phi = \ldots = A.$$

□

Def: Die φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ beschreibende Matrix schreiben wir

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi) := \Psi^{-1}\circ\varphi\circ\Phi}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[d, shift right, "\Psi^{-1}"'] \\ K^n \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi)"'] & K^m \arrow[u, shift right, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

Bsp: $V = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum \lambda_i = 0\}$

$\mathcal{B} = ((1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1))$

$W = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}' = ((1,1), (1,-1))$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\Big|_V : \underset{\substack{\cap \\ V}}{(\lambda_1,\dots,\lambda_4)} \longmapsto \underset{\substack{\cap \\ W}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_4 \end{pmatrix}}$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi)$: $e_1 \xmapsto{\Phi} (1,0,0,-1) \xmapsto{\varphi} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{\Psi}{\longleftarrow\!\shortmid} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$e_2 \longmapsto (0,1,0,-1) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{\Psi}{\longleftarrow\!\shortmid} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$e_3 \longmapsto (0,0,1,-1) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\Psi}{\longleftarrow\!\shortmid} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Demnach: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

10.4 Komposition von linearen Abbildungen, Matrizenprodukt

Situation: $K^p \xrightarrow{B} K^n \xrightarrow{A} K^m$

d.h. $A \in M(m \times n, K)$, $B \in M(n \times p, K)$.

Was ist die $A \circ B$ beschreibende $(m \times p)$-Matrix C?

k-te Spalte von C = Bild von $e_k \in K^p$ unter $A \circ B$, $k = 1,\dots,p$.

$$e_k \overset{B}{\longmapsto} \underset{\substack{\| \\ k\text{-te Spalte von } B}}{B\cdot e_k} \longmapsto A\cdot(B\cdot e_k) =: C\cdot e_k$$

D.h., wende A auf k-te Spalte von B an!

Verfahren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 \cdots & k & \cdots p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ik} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \leftarrow i \\ \vdots \\ m \end{array} \end{array}$$

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$$

In Formeln: $(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \cdot (b_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,p}} := \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,p}}$.

Merke: Summiere über benachbarte Indizes (hier: j).

10.5 Bsp

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0 & 0+0-3 \\ 4+7+0 & 4+0-1 \\ -2+0+0 & -2+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 11 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

b) Die Reihenfolge ist wichtig:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10.6 Die Matrixalgebren

Addition und Multiplikation von Matrizen macht

$$M(n,K) := M(n\times n, K)$$

(quadratische Matrizen!) zu einem nichtkommutativen (→ Bsp. 10.5, b) Ring mit $0 := \begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}$ die Nullmatrix und Eins $E_n := \begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}$ die (n×n) Einheitsmatrix. Die Ringstruktur ist ferner verträglich mit der Struktur als K-Vektorraum, man spricht von einer K-Algebra. Die abstrakten Eigenschaften einer (n×n)-Matrix spiegeln sich in ihren Eigenschaften als Element dieser K-Algebra wieder. (→ SS/Algebra)

10.7 Zeilentransformationen als Matrizenmultiplikationen

Zeilentransformationen von $A \in M(m\times n, K)$ lassen sich durch Linksmultiplikation mit (m×m)-Matrizen darstellen: (alle nicht dargestellten Einträge sind 0)

(I) $(i) \longrightarrow \lambda\cdot(i)$

$$A \longmapsto \begin{array}{c} \begin{matrix}1 & \cdots & i & \cdots & m\end{matrix} \\ \begin{pmatrix}1 &&&&\\ &\ddots&&&\\ &&\lambda&&\\ &&&\ddots&\\ &&&&1\end{pmatrix}\end{array} \cdot A$$

(II) $(i) \longrightarrow (i) + \lambda\cdot(j)$

$$A \longmapsto \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & j & \end{matrix} \\ i & \begin{pmatrix}1 &&& & \\ &\ddots&&\lambda& \\ &&\ddots&& \\ &&&\ddots& \\ &&&&1\end{pmatrix}\end{array} \cdot A$$

(Bild für $i<j$).

III) $(i) \longleftrightarrow (j)$

$(\text{o.E. } i<j)$. $\quad A \longmapsto \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot A \\ \uparrow \; i \qquad \uparrow \; j \end{array}$

Def: Die in (I)-(III) anzuwendenden Matrizen heißen <u>Elementarmatrizen</u>.

Bsp: $(1) \longmapsto (1) + 2\cdot(3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bem: Zeilenumf. für $A: K^n \to K^m$
$\longleftrightarrow$ Komposition mit Isomorphismus $K^m \to K^m$.

10.8 Inverse Matrizen und $GL(n,K)$

Def 1) Ist $A: K^n \to K^n$ ein Isomorphismus (notwendig: $A \in M(n\times n, K)$ eine <u>quadratische</u> Matrix), so heißt die die Umkehrabbildung beschreibende Matrix A^{-1} die zu A <u>inverse Matrix</u>.

Charakterisierung von A^{-1}: $A\cdot A^{-1} = Id_{K^n} = E_n$ (oder: $A^{-1}A = E_n$ → Satz 9.7.4)

2) Die <u>allgemeine lineare Gruppe</u>:
$GL(n,K) := \{A \in M(n,K) \mid A \text{ invertierbar}\}$. $\subset Bij(K^n)$

10.9 Anwendung 4 der G.-El.: Berechnung von A^{-1}

Sei $A \in M(n\times n, K)$ invertierbar.

Wir müssen lösen: $\quad A\cdot A^{-1} = E_n$

$$\Longleftrightarrow \quad (A\cdot A^{-1})e_i = e_i \quad , i = 1,\dots,n$$

$$\Longleftrightarrow \quad A\cdot(A^{-1}e_i)=e_i \quad, i=1,\ldots,n.$$

D.h. die i-te Spalte von A^{-1} löst das LGS $A\cdot x=e_i$.

Beobachtung: A invertierbar

$\Longleftrightarrow$ die G.-El. für A liefert E_n. (↗ Satz 9.16.3)

Demnach: $(A|e_i) \xrightarrow{\text{G.-El.}} (E_n|v_i)$ und $A\cdot v_i=e_i$. $\quad (*)$

Verfahren: Führe $(*)$ simultan durch für $i=1,\ldots,n$:

$$(A|E_n)\xrightarrow{\text{G.-El.}}(E_n|B).$$

Nach obiger Überlegung mit $v_i=i$-te Spalte von B gilt: $\boxed{B=A^{-1}}$.

Bem: Sind $E(1),\ldots,E(k)$ die in dieser G.-El. eingesetzten Elementarmatrizen, so gilt $\quad B=E(k)\cdot\ldots\cdot E(1)$.

Dies zeigt: Jedes $A\in GL(n,K)$ ist Produkt von Elementarmatrizen:

$$A=B^{-1}=E(1)^{-1}\cdot\ldots\cdot E(k)^{-1}.$$

10.10 Bsp: $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(2)\to(2)-2\cdot(1)}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)\to(1)-3\cdot(2)}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-3\\0&1&-2&1\end{array}\right)$$

Probe: $\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-3\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}$

10.11 Die Smith-Normalform einer Matrix

Satz. Sei $A \in M(m \times n, K)$. Dann gibt es $S \in GL(n,K)$, $T \in GL(m,K)$, so dass $T^{-1} \cdot A \cdot S$ Smith-Normalform hat, d.h.

$$T^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \}r \\ \}m-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\qquad}_{r} & \underbrace{\qquad}_{n-r} \end{matrix} \end{array}$$

Bew: Der Gauß-Algorithmus liefert Elementarmatrizen $E(1), \dots, E(k) \in GL(m,K)$ mit

$$E(k) \cdot \ldots \cdot E(1) \cdot A = \left(\begin{matrix} 0 \ldots 0 \; \boxed{1 \; *} \; \boxed{1} \\ 0 \quad\quad \boxed{1 * *} \end{matrix}\right) \}r \quad . \quad \text{Definiere } T := (E(k) \cdot \ldots \cdot E(1))^{-1} = E(1)^{-1} \cdot \ldots \cdot E(k)^{-1}.$$

Auf $T^{-1} \cdot A$ wenden wir einen modifizierten Gauß-Algorithmus an, der auf den Spalten statt auf den Zeilen operiert. Die dabei verwendeten elementaren Spaltentransformationen sind genau die Ergebnisse der Multiplikationen mit Elementarmatrizen $E(k+1), \dots, E(l) \in GL(n,K)$ von rechts.

Resultat: $$T^{-1} \cdot A \cdot E(k+1) \cdot \ldots \cdot E(l) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \}r .$$

Setze $S := E(k+1) \cdot \ldots \cdot E(l)$.

$\square$

10.12 | Interpretation 1 der Smith-Normalform: Der Rangsatz

Bis auf Basiswahlen ist jede lineare Abbildung zwischen <u>verschiedenen</u> endlich-dimensionalen <u>Vektorräumen durch ein $r \in \mathbb{N}$</u> bestimmt:

<u>Def:</u> Für V,W K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ linear heißt

$$\operatorname{rk}(\varphi) := \dim \operatorname{im}(\varphi) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$ der <u>Rang</u> von φ.

<u>Satz:</u> Seien V,W $\overbrace{K\text{-Vektorräume}}^{\text{endl.-dimensionale}}$ und $\varphi: V \to W$ linear. Dann existieren Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{B}'$ von W mit

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\operatorname{rk}(\varphi). \\ \\ \end{array} \end{array}$$

<u>Bew:</u> Wähle Isomorphismen $\Phi: K^n \to V$, $\Psi: K^m \to W$, d.h. Basen $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_0'$.

Satz 2.12 angewendet auf $A := \Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0'\mathcal{B}_0} \varphi$ liefert $S \in GL(n,K)$, $T \in GL(m,K)$ mit

$$T^{-1} \cdot A \cdot S = \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rrr, bend right, "A"'] & V \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[r, "\Psi^{-1}"] & K^m \arrow[d, "T^{-1}"] \\ K^n \arrow[u, "S"] \arrow[rrr, "T^{-1} \cdot A \cdot S"'] & & & K^m \end{tikzcd}$$

Definiere $\mathcal{B}$ die durch $K^n \xrightarrow{S} K^n \xrightarrow{\Phi} V$

und $\mathcal{B}'$ die durch $K^m \xrightarrow{T} K^m \xrightarrow{\Psi} W$

definierten Basen, d.h. $\mathcal{B} = \left((\Phi \circ S)(e_1), \ldots, (\Phi \circ S)(e_n) \right)$

$$\mathcal{B}' = \left((\Psi \circ T)(e_1), \ldots, (\Psi \circ T)(e_m) \right).$$

Es gilt: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi) = T^{-1} A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\square$

10.13 Interpretation 2 der Smith-Normalform: Klassifikationssatz

Auf $M(m \times n, K)$ betrachte die Äquivalenzrelation

$$A \sim B \;:\Leftrightarrow\; \exists S \in GL(n,K)\; \exists T \in GL(m,K) : B = T^{-1} A \cdot S. \qquad (L)$$

Der Rangsatz liefert:

Korollar: Die Rangabbildung

$$\mathrm{rk}: M(m \times n, K) \longrightarrow \mathbb{N}, \quad A \longmapsto \mathrm{rk}(A)$$

induziert eine Bijektion

$$M(m \times n, K)/\sim \;\longrightarrow\; \{0, \ldots, \min\{m,n\}\}.$$

Bew: Wohldefiniert: Die Dimension des Bildes ändert sich nicht unter Komposition mit Isomorphismen von links oder rechts.

Ferner: $\mathrm{rk}(A) \leq \min(m,n)$

Injektiv: Seien $A, B \in M(m \times n, K)$, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) =: r$.

Der Rangsatz liefert $S_1, S_2 \in GL(n,K)$, $T_1, T_2 \in GL(m,K)$ mit

$$T_1^{-1} \cdot A \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = T_2^{-1} \cdot B \cdot S_2 \,,$$

$$\Rightarrow \quad B = T_2 \cdot T_1^{-1} \cdot A \cdot S_1 \cdot S_2^{-1} = (T_1 \cdot T_2^{-1})^{-1} \cdot A \cdot (S_1 \cdot S_2^{-1}).$$

Surjektiv: ✓ □

10.14 Andere Klassifikationen von Matrizen

Wir werden in LA II zwei weitere Klassifikationen für (quadratische) Matrizen kennenlernen:

(E) $A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, S \in Gl(n,K) \;:\; B = S^{-1} \cdot A \cdot S.$ [S – "similarity"]

(B) $A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, S \in Gl(n,K) \;:\; B = S^t \cdot A \cdot S.$ [B – "bilinear"]

Diese Klassifikationen behandeln die folgenden Situationen:

(L) : Lineare Abbildungen zwischen <u>verschiedenen</u> Vektorräumen; LGS'e.

(E) : Lineare Abbildungen <u>eines</u> Vektorraums auf sich (<u>Endomorphismen</u>)

(B) : Bilinearformen: $(v,w) \longmapsto {}^t v \cdot A \cdot w \,, \quad v,w \in K^n.$

<u>Lit</u>: Jänich, §11.

§11. Dualräume

Betrachten wir $A \in M(m\times n, K)$ als lineare Abbildung $K^n \to K^m$, so interpretieren sich die Spalten von A als Elemente von K^m $(A\cdot e_j \in K^m, j=1,..,n)$. Die Zeilen von A $(e_i^t \cdot A \in M(1\times n, K), i=1,..,m)$ haben auch eine Interpretation: Sie sind lineare Abbildungen $K^n \to K$.

11.1 Linearformen und der Dualraum

Def: Sei V ein K-Vektorraum. Eine Linearform auf V ist eine lineare Abbildung $V \to K$, also eine lineare Funktion auf V. Der K-Vektorraum $Hom(V,K)$ der Linearformen auf V heißt Dualraum von V.

Notation: $V^* := Hom(V,K)$.

Ferner identifizieren wir $(K^n)^*$ mit $M(1\times n, K)$, d.h. mit Zeilenvektoren.

11.2 Bsp:

a) $(1\ 2\ 3): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$

b) Die Linearisierung einer differenzierbaren Funktion $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, in einem Punkt $p \in U$ ist eine Linearform

$$Df|_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \in (\mathbb{R}^n)^*.$$

Die Funktion

$$g : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(p) + (Df_{|p}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

approximiert f dann bis zur ersten Ordnung um p herum:

$$\exists \varepsilon > 0\ \exists c > 0 : \forall x \in B_\varepsilon(p) \quad |f(x) - g(x)| \leq c \cdot d(x,p)^2$$

Kugel vom Radius ε um p. Abstand.

↗ Analysis II.

c) Die <u>Dirac-Distributionen</u> ("Dirac-Funktionen") sind die Linearformen

$$\delta_p : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(p)$$

für ein $p \in \mathbb{R}$.

11.3 Duale Basen

Zu einer Basis $v_1, \dots, v_n$ von V ist kanonisch eine Basis von V^* zugeordnet.

<u>Satz:</u> Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis des K-Vektorraums V. Dann existieren eindeutige $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ mit

$$\alpha_i(v_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (*)$$

Ferner bilden $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Basis von V^*.

<u>Def:</u> $\mathcal{B}^* := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ heißt die zu $\mathcal{B}$ <u>duale Basis</u> von V.

Vorsicht: α_i hängt von allen $v_1,\dots,v_n$ ab, nicht nur von v_i! (2.28)

Es ist daher sinnlos, von einem zu v_i "dualen Vektor" zu sprechen.

Bew. d. Satzes: Ist $v\in V$, so existieren eindeutige $\lambda_i\in K$ mit $v=\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$.

Um (*) zu erfüllen, müssen wir definieren: $\boxed{\alpha_i(v):=\lambda_i}$

α_i ist linear: $v=\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, $w=\sum_{i=1}^n \mu_i v_i$, $\lambda,\mu\in K$, dann ist

$$\lambda v+\mu w=\sum_{i=1}^n(\lambda\lambda_i+\mu\mu_i)\,v_i$$

die eindeutige Darstellung von $\lambda v+\mu w$ als Linearkombination der v_i.

Demnach gilt: $\alpha_i(\lambda v+\mu w)=\lambda\lambda_i+\mu\mu_i=\lambda\,\alpha_i(v)+\mu\cdot\alpha_i(w)$.

$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sind linear unabhängig:

Seien $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ und $\sum_{i=1}^n\lambda_i\alpha_i=0$, d.h. $\forall v\in V: \sum_{i=1}^n\lambda_i\alpha_i(v)=0$.

Dann gilt: $\forall j: \lambda_j=\sum_{i=1}^n\lambda_i\alpha_i(v_j)=0$.

$V^*=L(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$: Ist $\alpha\in V^*$, so gilt $\boxed{\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha(v_i)\cdot\alpha_i}$:

Es reicht, diese Identität auf der Basis $v_1,\dots,v_n$ zu überprüfen.

In der Tat gilt: $\forall j$ $\sum_{i=1}^n\alpha(v_i)\cdot\alpha_i(v_j)\overset{(*)}{=}\sum_{i=1}^n\alpha(v_i)\cdot\delta_{ij}=\alpha(v_j)$. □

Korollar: $\boxed{\dim V=\dim V^*}$. □

Bem.: V und V^* sind also isomorph für $\dim V<\infty$, aber nicht kanonisch isomorph.

11.4 Berechnung dualer Basen in K^n

Schreibe die Basis $v_1, \dots, v_n \in K$ in die Zeilen von $A \in M(n \times n, K)$.

Ist dann $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (K^n)^*$ die duale Basis, so gilt

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \cdots & \alpha_1(v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n(v_1) & \cdots & \alpha_n(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ = Zeilen von A^{-1}.

Bsp: ($\rightarrow$ 10.10) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, d.h. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Dann $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\alpha_1 = (7 \ \ -3), \alpha_2 = (-2 \ \ 1)$

11.5 Duale Abbildungen

Def: Seien V, W K-Vektorräume. Die durch eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \to W$$

induzierte Abbildung der Dualräume

$$\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*, \quad \beta \longmapsto \varphi^*(\beta) := \beta \circ \varphi$$

heißt duale Abbildung.

Bem: $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

Bsp: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\mu) = \begin{pmatrix} \mu \\ 3\mu \end{pmatrix}$

$$\varphi^* : (\mathbb{R}^2)^* \longrightarrow (\mathbb{R})^* = \mathbb{R}, \ \beta = (\lambda_1 \ \lambda_2) \longmapsto \left(\mu \longmapsto (\beta \circ \varphi)(\mu) = (\lambda_1 \ \lambda_2) \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ 3\mu \end{pmatrix} \right)$$

$$\overset{(\lambda_1 + 3\lambda_2) \cdot \mu}{\parallel}$$

d.h. $\varphi^* = (1 \ 3)$.

11.6 Duale Abbildungen und Transposition

Arbeitet man mit dualen Basen, so wird die duale Abbildung durch die transponierte Matrix repräsentiert:

Satz: Seien V, W K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

Dann gilt:
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*(\mathcal{B}')^*}(\varphi^*) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi)\right)^t}$$

Illustration:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & W \\ K^n \arrow[u, "\mathcal{B} \leftrightarrow \Phi"] \arrow[r, "A"'] & K^m \arrow[u, "\Psi \leftrightarrow \mathcal{B}'"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V^* & W^* \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ K^n \arrow[u, "\mathcal{B}^* \leftrightarrow \Phi^*"] & K^m \arrow[l, "A^t"] \arrow[u, "\Psi^* \leftrightarrow (\mathcal{B}')^*"'] \end{tikzcd}.$$

Bew: Notation: $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$

$\mathcal{B}^* = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\mathcal{B}')^* = (\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Nach Def. von A gilt: $\quad \varphi(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad$ (Summation über Zeilenindex!)

Zur Bestimmung von $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*(\mathcal{B}')^*}(\varphi^*)$ müssen wir $\varphi^*(\beta_k)$, $k = 1, \dots, m$, berechnen:

$$\begin{aligned} \forall j: \quad \varphi^*(\beta_k)(v_j) &= \beta_k(\varphi(v_j)) \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij}\, \beta_k(w_i) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\, \delta_{ki} \\ &= a_{kj} = \sum_{l=1}^n a_{kl} \cdot \alpha_l(v_j). \end{aligned}$$

Dies zeigt: $\varphi^*(\beta_k) = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \cdot \alpha_l$.

M.a.W.: k-te Spalte von $\mathrm{Mat}_{B^*(B')^*}(\varphi^*)$ = $k$te Zeile von A. □

Korollar: a) Für $A \in M(m \times n, K)$, $B \in M(n \times p, K)$ gilt:

$$\boxed{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}.$$

b) $A \in GL(n, K)$

$\Downarrow$

$$\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$$

Bew: a) Die Dualisierung von

$$\begin{tikzcd} K^p \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "A \cdot B"'] & K^n \arrow[r, "A"] & K^m \end{tikzcd}$$

ist

$$\begin{tikzcd} K^p & K^n \arrow[l, "B^t"'] & K^m \arrow[l, "A^t"'] \arrow[ll, bend left, "(A \cdot B)^t"] \end{tikzcd}.$$

Dies zeigt: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

b) Analog:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "E"'] & K^n \arrow[r, "A^{-1}"] & K^n \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K^n & K^n \arrow[l, "A^t"'] & K^n \arrow[l, "(A^{-1})^t"'] \arrow[ll, bend left, "E^t = E"] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow A^t \cdot (A^{-1})^t = E$. □

11.7 Zeilenrang = Spaltenrang

Satz a) Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\mathrm{rk}(\varphi) = \mathrm{rk}(\varphi^*).$$

b) Für $A \in M(m \times n, K)$ gilt $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^t)$.

Bem: Die linke bzw. rechte Seite in (b) berechnet die Dimension des von den Spalten bzw. Zeilen von A aufgespannten Unterraums von K^m bzw.

von $(K^n)^*$ (<u>Spaltenrang</u> bzw. <u>Zeilenrang</u>).

(b) sagt also: <u>Spaltenrang (A) = Zeilenrang (A)</u>.

<u>Bew:</u> a) Nach dem Rangsatz (Satz 10.12) existieren Basen B, B' für V und W mit

$$\mathrm{Mat}_{B',B}(\varphi) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \begin{smallmatrix}1 & \\ & 1\end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{n-r} \end{array} \end{array} =: B,$$

und nach Satz 11.6 gilt

$$\mathrm{Mat}_{B^*,(B')^*}(\varphi^*) = B^t = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \begin{smallmatrix}1 & \\ & 1\end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{m-r} \end{array} \end{array}.$$

Demnach:

$$\mathrm{rk}(\varphi) = \mathrm{rk}(B) = r = \mathrm{rk}(B^t) = \mathrm{rk}(\varphi^*).$$

b) Wende (a) auf $A: K^n \to K^m$ an und benutze Satz 11.6. □

11.8 <u>Anwendung 5 der G.-El.: Basisauswahl</u>

Für $v_1, \dots, v_m \in K^n$ finde $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le m$, so dass $v_{j_1}, \dots, v_{j_k}$ eine Basis von $L(v_1, \dots, v_m)$ ist!

[Das Verfahren 9.15 liefert eine ausgezeichnete Basis mit Vektoren der Form $(0, \dots, 0, 1, *, \dots, *) \in K^n$; dies löst nicht das Problem der Basisauswahl.]

<u>Verfahren:</u> Schreibe $v_1, \dots, v_m$ als Spaltenvektoren von $A \in M(n \times m, K)$.

G.-El. $\longrightarrow A'$ mit Stufen in den Spalten $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m$.

<u>Zeigt:</u> $\mathrm{rk}(A) \overset{(11.7)}{=} \text{Zeilenrang}(A) \overset{\text{Satz 9.15}}{=} \text{Zeilenrang}(A') \overset{(11.7)}{=} \mathrm{rk}(A') = r$.

Die gleichen Zeilentransformationen machen aus $B = (v_{j_1} \dots v_{j_k}) \in M(n \times k, K)$

die Matrix $\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \\ \underbrace{\qquad}_{k} \end{array}$.

<u>Es folgt:</u> $\mathrm{rk}(B) = k$.

$\Rightarrow v_{j_1}, \dots, v_{j_k}$ ist Basis für $L(v_1, \dots, v_m)$. $\square$

<u>Vorsicht:</u> Die Spalten $j_1, \dots, j_k$ von A' (die $e_1, \dots, e_k \in K^n$ geben) haben i.a. nichts mit $L(v_1, \dots, v_m)$ zu tun!

11.9 | <u>Annulator und Nullstellenmenge</u>

<u>Def:</u> Sei V ein K-Vektorraum.

a) Ist $U \subset V$ ein Unterraum, so heißt

$$U^0 := \{\alpha \in V^* \mid \forall v \in U : \alpha(v) = 0\}$$

<u>Annulator</u> von U.

b) Ist $F \subset V^*$ ein Unterraum, so heißt

$$Z(F) := \{v \in V \mid \forall \alpha \in F : \alpha(v) = 0\}$$

<u>Nullstellenmenge</u> von $\mathcal{F}$.

<u>Berechnung</u>: Für $U = L(v_1, \dots, v_k)$, $\mathcal{F} = L(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ gilt:

$$U^0 = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(v_i) = 0,\ i = 1, \dots, k\} = \ker\left(V^* \to K^k,\ \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(v_1) \\ \vdots \\ \alpha(v_k) \end{pmatrix}\right)$$

$$Z(\mathcal{F}) = \{v \in V \mid \alpha_j(v) = 0,\ j = 1, \dots, l\} = \ker\left(V \to K^l,\ v \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1(v) \\ \vdots \\ \alpha_l(v) \end{pmatrix}\right).$$

Ist $\dim V < \infty$, so lassen sich U^0 und $Z(\mathcal{F})$ also durch G.-El. berechnen.

11.10 <u>Bsp</u>

a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = L\big((0,1,2), (2,1,0)\big) \subset V$

$$U^0 = \ker\left((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \longmapsto \begin{pmatrix} 0\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 2\cdot\lambda_3 \\ 1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 0\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right)^t = \dots = L\big((4\ {-2}\ 1)\big) \subset V^* = (\mathbb{R}^3)^*.$$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = L\big((0\ 1\ 2), (2\ 1\ 0)\big) \subset V^*$.

$$Z(\mathcal{F}) = \ker\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 2\cdot\lambda_3 \\ 2\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 0\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = L\big((4, -2, 1)\big) \subset V = \mathbb{R}^3.$$

11.11 <u>Bidualräume</u>

Ist $\dim V < \infty$, so sind V und V^* isomorph:

$$V \simeq K^n \simeq V^*, \quad n = \dim V = \dim V^*.$$

Unter den Isomorphismen $V \to V^*$ gibt es aber i.a. keinen ausgezeichneten; V und V^* müssen daher sorgfältig unterschieden werden!

Es gibt jedoch eine kanonische Abbildung

$$\mathcal{K}: V \longrightarrow V^{**} := (V^*)^*,$$

$$v \longmapsto \left(V^* \ni \alpha \longmapsto \alpha(v)\right).$$

<u>Satz:</u> $\dim V < \infty \Rightarrow \mathcal{K}$ ist ein Isomorphismus.

<u>Bew:</u> Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die duale Basis von V^*.

Dann ist $\mathcal{K}(v_1), \ldots, \mathcal{K}(v_n)$ die zu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ duale Basis von $(V^*)^*$:

$$(\mathcal{K}(v_i))(\alpha_j) = \alpha_j(v_i) = \delta_{ji} = \delta_{ij}. \qquad \square$$

<u>Bem:</u> $\dim V = \infty$, so ist $\mathcal{K}$ nur injektiv.

11.12 Beziehungen zwischen Annulator und Nullstellenmenge.

<u>Satz:</u> Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V < \infty$, und $U \subset V$, $F \subset V^*$ Unterräume.

1) $U = Z(U^0) \quad \subset V$

2) $F = (Z(F))^0 \quad \subset V^*$

3) $\mathcal{K}(Z(F)) = F^0 \quad \subset V^{**}$.

Beweisskizze: Die folgenden Inklusionen folgen direkt aus den Definitionen:

(1) $\mathcal{U} \subset Z(\mathcal{U}^0)$, (2) $\mathcal{F} \subset (Z(\mathcal{F}))^0$, (3) $\mathcal{K}(Z(\mathcal{F})) \subset \mathcal{F}^0$.

Man zeigt dann jeweils die Gleichheit der Dimensionen ((1): ↗ 12.14)

$\square$

§12 Komplementäre Unterräume und Quotientenräume, Dimensionsformeln

(Einige Nachträge zu Kap. I und II.)

12.1 | Die Äquivalenzrelation zu einem Unterraum; Quotientenräume

Ist V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum, so interessiert man sich manchmal nur für Eigenschaften von V bis auf Addition von Elementen von U.

Zugehörige Äquivalenzrelation: $\boxed{v_1 \sim_U v_2 \;:\Leftrightarrow\; v_1 - v_2 \in U}$.

Äquivalenzklassen = affine Unterräume der Form $v + U$.

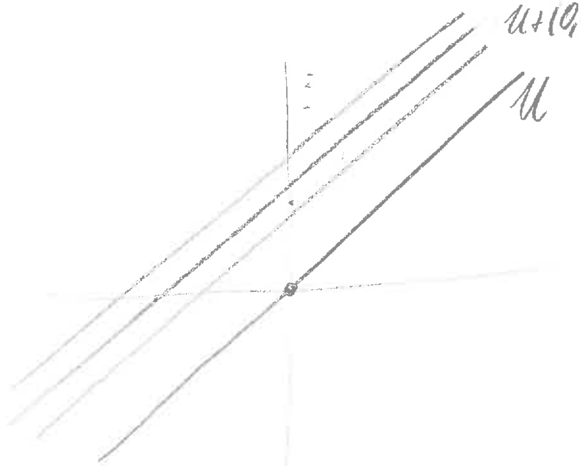
Quotient: $q_U : V \longrightarrow V/\sim_U$ induziert die Struktur eines K-Vektorraums auf $V/\sim_U$:

$$\lambda \cdot [v] := [\lambda \cdot v]$$
$$[v] + [w] := [v + w].$$

Def: Der Quotienten(-vektor)raum (auch: Faktorraum) V/U ist die Menge $V/\sim_U$ mit der so definierten Struktur eines K-Vektorraums.

12.2 | Bsp

$V = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R} \cdot (1,1)$



Äquivalenzklassen:

Als abstrakter Vektorraum ist $V/U \simeq \mathbb{R}$, d.h. $\dim V/U = 1$:

z.B. $\varphi: \mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} V/U$, $\mu \longmapsto U + (0,\mu) = [(0,\mu)]$ ✓

φ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $\forall v \in \mathbb{R}^2 \ \exists!\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}: v = \lambda\cdot(1,1) + (0,\mu)$

Alternativ kann man die Umkehrabbildung angeben:

$\psi: V/U \longrightarrow \mathbb{R}$, $[(v_1,v_2)] \longmapsto v_2 - v_1$: [ist wohldefiniert!].

$\psi = \varphi^{-1}$: $(\varphi \circ \psi)[(v_1,v_2)] = \varphi(v_2 - v_1) = [(0, v_2 - v_1)] = [(0, v_2 - v_1) + v_1\cdot(1,1)] = [(v_1,v_2)]$.

$(\psi\circ\varphi)(\mu) = \psi([(0,\mu)]) = \mu$.

2.3 Zum Arbeiten mit Quotienräumen benutzt man zwei Werkzeuge: Die "universelle Eigenschaft" der Quotientenabbildung und zu U komplementäre Unterräume.

12.4 <u>Die universelle Eigenschaft der Quotientenabbildung</u> (vgl. Satz 3.11)

<u>Satz</u>: Sei V ein K-Vektorraum, $U \subset V$ ein linearer Unterraum und $q_U: V \to V/U$ die Quotientenabbildung.

Dann faktorisiert jede lineare Abbildung $\varphi: V \to W$, W ein beliebiger K-Vektorraum, mit $\boxed{\mathcal{U} \subset \ker(\varphi)}$ in eindeutiger Weise über $q_\mathcal{U}$:

$$\forall W \text{ } K\text{-VR } \forall \varphi \in \mathrm{Hom}(V,W) \left[\mathcal{U} \subset \ker(\varphi) \Rightarrow \exists! \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(V/\mathcal{U}, W) : \varphi = \bar{\varphi} \circ q_\mathcal{U}\right].$$

[Punkt: $\bar{\varphi}$ ist linear!]

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q_\mathcal{U}"'] & W \\ V/\mathcal{U} \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Bew</u>: $\mathcal{U} \subset \ker(\varphi)$ bedeutet, dass φ auf den Äquivalenzklassen von $\sim_\mathcal{U}$ konstant ist.

Satz 3.11 liefert daher die Aussage mengentheoretisch.

Die induzierte Abbildung $\bar{\varphi}$ ist automatisch linear:

$$\bar{\varphi}(\lambda \cdot [u] + \mu \cdot [v]) = (\bar{\varphi} \circ q_\mathcal{U})(\lambda u + \mu \cdot v) = \varphi(\lambda u + \mu v)$$
$$= \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v) = \lambda \bar{\varphi}([u]) + \mu \cdot \bar{\varphi}([v]). \qquad \square$$

12.5 <u>Bsp</u>: $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U} = \mathbb{R} \cdot (1,0,1)$, so induziert

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : V \to \mathbb{R}^2 \quad \text{wegen } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(\varphi)$$

die Abb. $\bar{\varphi} : V/\mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$.

12.6 Isomorphiesatz I

<u>Korollar</u>: Seien V, W K-Vektorräume und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Dann gibt es einen kanonischen (durch φ induzierten) Isomorphismus

$$\boxed{\mathrm{im}(\varphi) \simeq V/\ker(\varphi)}$$

<u>Bew:</u> Satz 12.4 angewendet mit $U := \ker(\varphi)$ liefert

$\bar{\varphi}: V/\ker(\varphi) \longrightarrow W$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ q_{\ker(\varphi)}$. $(*)$

Es bleibt zu zeigen: a) $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{im}(\bar{\varphi})$

b) $\bar{\varphi}$ ist injektiv, d.h. $\ker(\bar{\varphi}) = 0$.

a) Dies folgt aus $(*)$ zusammen mit der Surjektivität von $q_{\ker(\varphi)}$:

<u>$\mathrm{im}(\varphi) \subset \mathrm{im}(\bar{\varphi})$:</u> $w \in \mathrm{im}(\varphi) \Rightarrow \exists v \in V: w = \varphi(v) = \bar{\varphi}([v]) \Rightarrow w \in \mathrm{im}(\bar{\varphi})$.

<u>$\mathrm{im}(\varphi) \supset \mathrm{im}(\bar{\varphi})$:</u> $w \in \mathrm{im}(\bar{\varphi}) \Rightarrow \exists [v] \in V/\ker(\varphi): w = \bar{\varphi}([v])$

$\Rightarrow \exists v \in V: w = \bar{\varphi}([v]) = \varphi(v) \Rightarrow w \in \mathrm{im}(\varphi)$.

b) Sei $v \in V$ mit $\bar{\varphi}([v]) = 0$.

$\Rightarrow \varphi(v) = 0$

$\Rightarrow v \in \ker(\varphi)$

$\Rightarrow [v] = 0$. $\square$

12.7 Die kanonische Faktorisierung linearer Abbildungen

12.4. und 12.6. zeigen: $\varphi: V \to W$ faktorisiert kanonisch wie folgt:

$$V \longrightarrow V/\ker(\varphi) \xrightarrow{\;\cong\;} \mathrm{im}(\varphi) \longrightarrow W$$

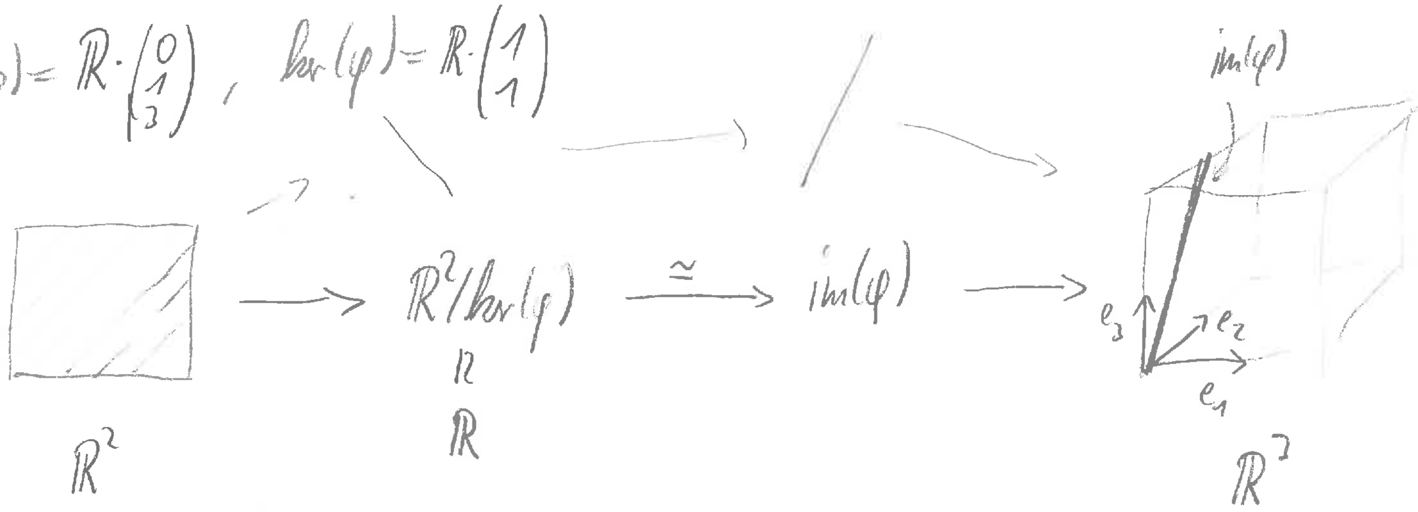
surjektiv, Kern: $\ker(\varphi)$

die Inklusion

Vgl. Rangsatz:
$$n\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}^{m}\right. = n\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix}}^{r}\right. \cdot \left.\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \end{pmatrix}}^{m}\right\} r$$

<u>Bsp:</u> $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathrm{im}(\varphi) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\ker(\varphi) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



12.8 | <u>Komplementäre Unterräume</u>

Ist $U \subset V$ ein linearer Unterraum, so wählt ein komplementärer Unterraum ein Repräsentantensystem für V/U (d.h. für jedes $v \in V$ <u>ein</u> Element von $[v]$) <u>in linearer Weise</u> aus.

<u>Def:</u> Sei W ein K-Vektorraum und $U \subset W$ ein lin. Unterraum. Ein <u>Komplement von U</u> (in W) (auch: ein <u>zu U komplementärer Unterraum</u>) ist ein lin. Unterraum $V \subset W$ mit

$$W = U + V \quad \wedge \quad U \cap V = \{0\}.$$

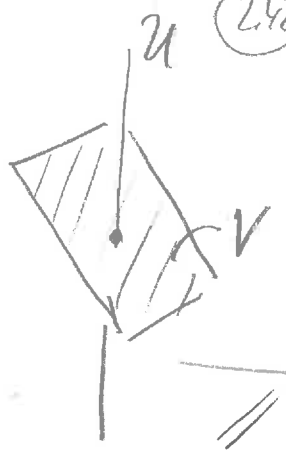
U und V heißen dann (zueinander) <u>komplementäre Unterräume</u>.

<u>Vorsicht:</u> Komplementäre Unterräume sind i.a. <u>nicht eindeutig</u>.

<u>Notation:</u> $W = U \oplus V$ (<u>innere direkte Summe</u>)

<u>Bsp:</u> $W=\mathbb{R}^3$, $U=\mathbb{R}\cdot(0,0,1)$

$V\subset W$ komplementär zu U $\iff$ $\dim V=2$, $(0,0,1)\notin V$



12.9 Existenz komplementärer Unterräume

<u>Satz:</u> Sei W ein K-VR und $U\subset W$ ein lin. Unterraum. Ist $\dim W/U<\infty$, so existiert ein Komplement $V\subset W$ zu U.

<u>Bew:</u> Wähle eine Basis $\bar v_1,\dots,\bar v_r$ von W/U. Seien $v_1,\dots,v_r\in W$ mit $\bar v_i=[v_i]$, $i=1,\dots,r$.

<u>Beh:</u> $V:=L(v_1,\dots,v_r)$ ist ein Komplement zu U.

<u>$U\cap V=\{0\}$:</u> Seien $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in K$ und $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i v_i\in U$.

$$\Rightarrow \sum\lambda_i\bar v_i=\Big[\sum\lambda_i v_i\Big]=[0].$$

$$\xRightarrow{\bar v_1,\dots,\bar v_r \text{ Basis}} \lambda_1=\dots=\lambda_r=0.$$

<u>$W=U+V$:</u> Ist $w\in W$, so existieren $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ mit $[w]=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\bar v_i$.

$$\Rightarrow \Big[w-\sum\lambda_i v_i\Big]=0$$

$$\Rightarrow u:=w-\sum\lambda_i v_i\in U$$

Dies zeigt: $w=u+\sum\lambda_i v_i\in U+V$. $\square$

<u>Bem:</u> Verfahren zur Konstruktion von Komplementen: Ergänze eine Basis $u_1,\dots,u_s$ von U zu einer Basis $u_1,\dots,u_n$ von W; $L(u_{s+1},\dots,u_n)$ ist ein Komplement zu U.

12.10 | Komplementäre Unterräume und der Quotientenraum

Komplemente zu U liefern konkrete Beschreibungen von W/U:

Satz: Sei W ein K-Vektorraum, $U \subset W$ ein Unterraum und $V \subset W$ ein Komplement zu U, d.h. $W = U \oplus V$. Dann definiert $q_U|_V$ einen kanonischen Isomorphismus

$$\varphi: V \xrightarrow{\simeq} W/U.$$

Bew: φ ist injektiv: $\ker(\varphi) = \ker(q_U) \cap V = U \cap V = \{0\}$.

φ ist surjektiv: $W = U + V = \ker(q_U) + V$

$$\Rightarrow \forall w \in W \; \exists v \in V: w \in v + \ker(q_U).$$

$$\Rightarrow \forall [w] \in W/U \; \exists v \in V: \varphi(v) = q_U(w) = [w].$$

□

12.11 | Dimensionsformeln I: Quotienten und direkte Summen

Satz: Sei W ein K-Vektorraum ($\dim W < \infty$) und $U \subset W$ ein Unterraum.

1) Ist $V \subset W$ ein Komplement zu U, so gilt $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\dim W = \dim U + \dim V} \\ \boxed{\dim W/U = \dim W - \dim U} \end{array} \right.$

2) $\dim U \leq \dim W$ und $\left[\begin{array}{c} \dim U \\ \shortparallel \\ \dim W \end{array} \iff \begin{array}{c} U \\ \shortparallel \\ W \end{array} \right]$.

Bew: 1) Sind $u_1, \ldots, u_r$ und $v_1, \ldots, v_s$ Basen von U bzw. V, so ist $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ eine Basis von W (überprüfe dies!)

Demnach: $\dim W = r + s = \dim U + \dim V$.

Ferner: $W/U \simeq V$ (Satz 12.10) zeigt: $\dim W/U = \dim V = \dim W - \dim U$.

2) Nach Satz 12.9 existiert ein Komplement V zu U.

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $\dim U \leq \dim W$ und Gleichheit gilt gdw. $\dim V = 0$,
d.h. falls $V = 0$ und $U = W$. □

12.12 | Dimensionsformeln II: Lin. Abbildungen

Satz: Seien V, W K-Vektorräume, $\dim V < \infty$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt:

$$\boxed{\dim V = \dim \ker(\varphi) + \dim \operatorname{im}(\varphi)}$$

Bew: Kor. 12.6 zeigt $\operatorname{im}(\varphi) \cong V/\ker(\varphi)$.

$\Rightarrow \dim \operatorname{im}(\varphi) = \dim V/\ker(\varphi) \overset{\text{Satz 12.11,1}}{=} \dim V - \dim \ker(\varphi)$. □

12.13 | Dimensionsformeln III: Durchschnitt und Summe

Sind U und V nicht komplementäre Unterräume von W, so ist
$\dim U \cap V > 0$ oder $\dim U + V < \dim W$.

Zum Studium dieser Situation betrachten wir:

$$\varphi: U \times V \longrightarrow U + V, \quad (u, v) \longmapsto u + v,$$

wobei $U \times V = \{(u, v) \mid u \in U, v \in V\}$ der Produktvektorraum von U und V ist:

$$\lambda \cdot (u, v) := (\lambda u, \lambda v); \quad (u_1, v_1) + (u_2, v_2) := (u_1 + u_2, v_1 + v_2).$$

Lemma 1: $\dim U \times V = \dim U + \dim V$

Bew: $u_1, \ldots, u_r$; $v_1, \ldots, v_s$ Basen von U, V.
$\Rightarrow (u_1, 0), \ldots, (u_r, 0), (0, v_1), \ldots, (0, v_s)$ Bas. von $U \times V$.

Lemma 2: $\ker(\varphi) = \{(w, -w) \mid w \in U \cap V\} \cong U \cap V$.

Bew: "$\supseteq$": $w + (-w) = 0$. ✓

"$\subset$": $(u,v)\in\ker(\varphi) \Rightarrow u+v=0$ in W.

$\Rightarrow u=-v\in U\cap V$

Demnach: $(u,v)=(w,-w)$ mit $w:=u=-v\in U\cap V$. □

Satz: Seien W ein K-Vektorraum und $U,V\subset W$ $\overbrace{\text{Unterräume}}^{\text{endl.-dim'l}}$. Dann gilt

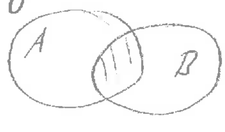
$$\boxed{\dim U+\dim V=\dim(U\cap V)+\dim(U+V)}$$

Bew: $\dim(U+V)=\dim\operatorname{im}(\varphi)\overset{\text{Satz 12.12}}{=}\dim(U\times V)-\dim\ker(\varphi)$

$\overset{\text{Lemma 1/2}}{=}\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$. □

Bem: a) Vgl. mit der Abzählformel für endl. Teilmengen $A,B\subset M$:

$$|A|+|B|=|A\cap B|+|A\cup B|.$$



b) $\dim(U+V)=\dim U+\dim V \iff U\cap V=\{0\}$.

12.14 Dimensionsformel IV: Annulatoren

Satz: Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V<\infty$ und $U\subset V$ ein Unterraum.

Dann gilt: $\boxed{\dim V=\dim U+\dim U^0}$

Bew: Dies folgt mit Satz 12.11.(1) und Kor. 11.3 sofort aus folgendem Lemma. □

Lemma: Die (kanonische) lin. Abb. $\boxed{\varphi: U^0\longrightarrow (V/U)^*}$ ist ein Isomorphismus.

$$\underset{\alpha|_U=0}{(\alpha:V\to K)}\longmapsto\big(\varphi(\alpha):[v]\longmapsto\alpha(v)\big)$$

<u>Bew:</u> <u>$\varphi(\alpha)$ ist wohldefiniert</u> nach Satz 12.4, denn $U \subset \ker(\alpha)$.

<u>φ ist injektiv:</u> $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists v \in V : \alpha(v) \neq 0$

$\Rightarrow \exists v \in V : \varphi(\alpha)[v] = \alpha(v) \neq 0$

$\Rightarrow \varphi(\alpha) \neq 0.$

<u>φ ist surjektiv:</u> Sei $\beta : V/U \to K$.

Setze $\alpha := \beta \circ q_U$, d.h. $\forall v \in V : \alpha(v) = \beta([v])$.

Dann gilt $U = \ker(q_U) \subset \ker(\alpha)$, also $\alpha \in U^0$.

Ferner ist $\varphi(\alpha) = \beta$ nach Def. $\square$