Konventionen:

- Unterpunkte in Bsp'en etc: a), b), ...
- Aufzählungen in Def'n: (i), (ii), ...
- Aufzählungen in Sätzen: 1), 2), ...

(griech: "zum Lernen gehörig")

Mathematik: • Die Wissenschaft, die aus der Untersuchung von Begriffen wie Maß, Struktur, Raum und Änderung hervorging.
• Die Strukturwissenschaft (im Ggs. zu Kultur- und Naturwissenschaften)

---

0. Grundlagen [etwas Metamathematik]

§1. Aussagenlogik

1.1 | Aussagen: Eine Aussage ist ein (sprachlicher) Satz, der (im Prinzip) eindeutig als wahr oder falsch erkannt werden kann.

1.2 | Beispiele: a) "Wien ist die Hauptstadt von Österreich." Ist eine (wahre) Aussage.

b) "$1+5=7$" " (falsche) ".

c) "Guten Abend!" ist keine Aussage

d) "$x+3=5$" ist keine Aussage, da wir x nicht kennen.

e) ~~"Heute ist Dienstag." ist keine Aussage, da sie von der Zusatzinformation des heutigen Datums abhängt.~~

f) "Dieser Satz ist falsch." ist keine Aussage (da paradox)

1.3 | Aussagenvariable : Platzhalter für eine (beliebige, unbestimmte) Aussage

A : "Wien ist die ... "

B : "$1+5=7$" "Belegungen von A, B"

Im Folgenden: A, B, C, ...

Aussagenvariable nehmen nach Belegung einen von zwei Werten an : W wahr, F falsch.

1.4 | Verknüpfung von Aussagen(variablen)

1.4.1 Negation: $\neg A$ "nicht A" : $A = F$, dann $\neg A = W$; $A = W$, dann $\neg A = F$

einfacher mit Wahrheitstafel :

A	$\neg A$
0	1
1	0

$0 \leftrightarrow F$

$1 \leftrightarrow W$

Sprachlich durch Einfügen von "nicht" (an der richtigen Stelle!)

Bsp.: $A =$ "Der Tank ist voll" $\quad \neg A =$ "Der Tank ist nicht voll"

$\neq$ "Der Tank ist leer".

$B =$ "Alle Studenten sind anwesend" $\quad \neg B =$ "Nicht alle Studenten sind anw."

$=$ "Mindestens ein Student fehlt"

$\neq$ "Alle Studenten sind nicht anwesend".

1.4.2 Konjunktion: $A \wedge B$ "A und B" (Eselsbrücke : $\wedge \rightsquigarrow$ AND)

Sprachlich durch "und" : $A \wedge B =$ "Der Tank ist voll und alle Studenten sind anwesend".

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.4.3 Disjunktion: $A \vee B$ „A oder B"

(„v" von Lat. „vel")

Sprachlich durch „oder":

$A \vee B$ = „Der Tank ist voll oder alle Stud. sind anwesend".

Bem.: Dies ist ein einschließendes oder, kein „entweder … oder".

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1.4.4 Bsp.

A = „Der Patient nimmt Medikament x=Akutex"

B = „ " " " " y=Chromosan"

$\neg A \wedge \neg B = (\neg A) \wedge (\neg B)$ = keines von beiden

$A \wedge \neg B = A \wedge (\neg B)$ = x aber nicht y

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ = genau eines von x, y, d.h. entweder x oder y, und nicht beide.

WT:

A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\neg(A \wedge B)$ = nicht beide (aber eventuell eines)

$\neg(A \vee B)$ = keines von beiden $= \neg A \wedge \neg B$.

1.4.5 Konditional (Implikation) $A \to B$ „A Pfeil B"

Sprachlich durch „wenn, dann"

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

0.4

M.a.W.: Will man das Konditional "$A \to B$" "widerlegen" (als falsch erkennen), so muss man A als wahr erkennen, B aber als falsch.

Sprachlich paradox: $A = F$, $B = W$, dann $(A \to B) = W$. ("Aus Falschem lässt sich alles beweisen")

Bsp: A: "$7<5$" C: "Der Mond ist ein Würfel".

B: "Die Erde ist rund"

$A \to B$: "Wenn $7<5$, dann ist die Erde rund",

$A \to C$: "Wenn $7<5$, dann ist der Mond ein Würfel"

Dies sind beides wahre Aussagen, denn die Voraussetzung "$7<5$" ist nicht wahr, ist also nicht erfüllt. Ein Konditional stellt keine kausale Beziehung her, sondern gibt eine Einschränkung A an, unter der B zu testen ist.

Bem: $A \to B$ kann man alternativ $\neg A \vee B$ schreiben.

1.4.6 Bijunktion (Äquivalenz) $A \leftrightarrow B$ "A Doppelpfeil B"

Sprachlich durch "genau dann, wenn"

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Bsp. A: "$7<5$"

B: "$3+3=7$"

dann $A \leftrightarrow B$ ist wahr.

1.5 Aussagenlogische Formeln ($\leadsto$ Verknüpfung von Aussagen)

etwa: $(\neg A \wedge B) \vee C$, $\neg\neg\neg A$, ...

aber nicht $A \wedge$, $A \vee C$, ...

(05)

Genauer: • Aussagenvariablen sind Formeln
• sind F, G Formeln, so auch $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$.

Eine Formel liefert eine Wahrheitstafel.

Klammern dürfen wir fortlassen, sofern die Reihenfolge der Verknüpfungen eindeutig bleibt nach Beachtung der folgenden Hierarchie:

$\neg$ bindet am stärksten
$\wedge$
$\vee$
$\rightarrow$
$\leftrightarrow$ bindet am schwächsten.

Bsp: $A \wedge B \vee C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E \wedge F$

$= (((A \wedge B) \vee C) \rightarrow D) \leftrightarrow ((\neg E) \wedge F)$

Beachte. $A \wedge B \wedge C$ ist sinnvoll, da $(A \wedge B) \wedge C$, $A \wedge (B \wedge C)$ haben gleiche WT.
Aber $A \rightarrow B \rightarrow C$ ist nicht sinnvoll, denn $(A \rightarrow B) \rightarrow C$, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ haben verschiedene WT.

1.6 Äquivalenz von Formeln

Zwei Formeln F, F' mit den gleichen Wahrheitstafeln heißen äquivalent.

Schreibweise: $F \Leftrightarrow F'$

Bsp: $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\rightsquigarrow$ Logikkalkül = Regeln zum Umformen aussagenlogischer Formeln

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$, $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

1.7 Logische Schlüsse

"$\Longleftrightarrow$" ist nicht Bestandteil der aussagenlogischen Sprache, sondern eine (wahre) Aussage über aussagenlogische Formeln, also in einer Ebene darüber.

Generell schreiben wir "$A \Longleftrightarrow B$" für (mathematische) Aussagen A und B, falls $A \longleftrightarrow B$ wahr ist.

Analog heißt "$A \Longrightarrow B$", dass $A \to B$ wahr ist. Hier wird auf den Sinn der Aussagen A, B Bezug genommen, nicht auf ihren Wahrheitswert.

Sprechweisen für $A \Longleftrightarrow B$: A äquivalent B
A genau dann, wenn B
A dann und nur dann, wenn B

Sprechweisen für $A \Longrightarrow B$: A impliziert B
B folgt aus A
A ist hinreichend für B
B ist notwendig für A. $(\neg B \Rightarrow \neg A)$

Zur Übung: Logik-Lernprogramm der Uni Würzburg

§2. Prädikatenlogik

Bsp: "Alle Menschen sind sterblich" / "Sokrates ist ein Mensch" $\Big\} \Longrightarrow$ "Sokrates ist sterblich"

Ist keine aussagenlogische Schlussfolgerung!

Für solche Schlüsse muss man unterscheiden,

- worüber etwas ausgesagt wird (das Subjekt der Aussage)
- und was ausgesagt wird (das Prädikat der Aussage).

Die Prädikatenlogik realisiert diese Unterscheidung durch Aussageformen.

2.1 Aussageform ist eine "sprachliche Form", die einer Aussage ähnelt, aber noch von Unbestimmten (Variablen) $x, y, \ldots$ abhängt.

Die Variablen können dabei Werte aus einer Sammlung von Objekten (vgl. Mengen, §3) annehmen, ihrem Definitionsbereich oder ihrem Universum.

Bsp: $M(x)$ = "x ist ein Mensch" / $S(x)$ = "x ist sterblich" $\Big\}$ wobei x ein Substantiv der deutschen Sprache ist.

$B(x)$ = "$x + 1 = 2$", wobei x eine ganze Zahl ist.

$M(x,y)$ = "x ist Mutter von y", wobei x und y Menschen sind.

Eine Aussageform wird zu einer Aussage, wenn allen Variablen ein Wert aus ihrem Definitionsbereich zugewiesen wird.

Bsp: $B(2) = $ "$2+1=2$" eine falsche Aussage
$B(1) = $ "$1+1=1$" eine wahre ".

2.2 Quantoren

Sie geben an, auf "wie vielen" Elementen eine Aussageform getestet werden soll.

Allquantor: $\forall$ "für alle" / "für jeden"

Existenzquantor: $\exists$ "es existiert" / "es gibt"

Bsp: $\forall x\ B(x)$: "für jede ganze Zahl x gilt $x+1=2$" eine falsche Aussage
$\exists x\ B(x)$: "es gibt (mindestens) eine ganze Zahl x, so dass $x+1=2$" eine wahre Aussage.

$\forall x\,(M(x) \to S(x))$: "alle Menschen sind sterblich".

Bem: $\forall x\ Q(x)$ ist falsch, sobald es (mindestens) ein x gibt mit $Q(x) = F$:

$$\neg(\forall x\ Q(x)) = \exists x\ \neg Q(x) \quad (= \exists x(\neg Q(x)))$$

$\exists x\ Q(x)$ ist falsch, wenn $Q(x)$ für kein einziges x wahr ist, d.h. wenn für alle x $Q(x)$ falsch ist:

$$\neg(\exists x\ Q(x)) = \forall x\ \neg Q(x)$$

D.h. $\forall x$ / $\exists x$ lässt sich in Formeln ersetzen durch $\neg\exists x\neg$ / $\neg\forall x\neg$

Bindungsstärke: $\forall, \exists$ binden genauso stark wie $\neg$ (also stärker als $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$).

Beachte noch: In Ausdrücken wie $\forall x\, F$ oder $\exists x\, F$, wo F eine prädikatenlogische Formel ist, wirken $\forall x$ bzw. $\exists x$ auf <u>alle</u> Aussageformen in F.

2.3) Bsp.

a) $B(x)$: "$x+1=2$", x eine ganze Zahl

$\forall x\, B(x) = F$ "jede ganze Zahl x erfüllt $x+1=2$"

$\exists x\, B(x) = W$ "$x+1=2$ hat eine ganzzahlige Lsg"

c) $S(x,y)$: "$x+y=2$"

(i) $\forall x\, \forall y\, S(x,y) = F$ "$x+y=2$ gilt für alle x,y"

(ii) $\forall x\, \exists y\, S(x,y) = W$ "ist x gegeben, so lässt sich y finden mit $x+y=2$"

(iii) $\exists x\, \forall y\, S(x,y) = F$ "es gibt (mindestens) ein x, so dass $x+y=2$ für alle y gilt"

(iv) $\exists x\, \exists y\, S(x,y) = W$ "es gibt x,y mit $x+y=2$".

Implikationen: [beachte: $\forall x\, F \Rightarrow \exists x\, F$].

$$\begin{tikzcd}
 & \forall x\, \exists y\, S(x,y) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\forall x\, \forall y\, S(x,y) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \exists x\, \exists y\, S(x,y) \\
 & \exists x\, \forall y\, S(x,y) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

b) $D(x)$: "x ist deutscher Staatsbürger" $\}$ x eine Person

$S(x)$: "x zahlt Einkommensteuer"

$\forall x\,(D(x) \rightarrow S(x)) = F$, denn nicht jeder Deutsche zahlt ESt.,
z.B. Kinder.

Was bedeutet $\forall x\, \neg(D(x) \rightarrow S(x))$?

$$\forall x\, \neg(D(x) \rightarrow S(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x\, \neg(\neg D(x) \vee S(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x\, (D(x) \wedge \neg S(x))$$

"jede Person ist Deutscher und zahlt keine ESt"

Dagegen $\neg \forall x\, (D(x) \rightarrow S(x))$
$$\Longleftrightarrow \exists x\, \neg(D(x) \rightarrow S(x))$$
$$\Longleftrightarrow \exists x\, \neg(\neg D(x) \vee S(x))$$
$$\Longleftrightarrow \exists x\, (D(x) \wedge \neg S(x))$$

"es gibt jemanden, der Deutscher ist und keine ESt zahlt".

2.4 Schlussregeln

z.B. $M(x)$: "x ist ein Mensch"
$S(x)$: "x ist sterblich"

x ein Substantiv der dt. Sprache.

$$M(\text{Sokrates}) \wedge (\forall x\,(M(x) \rightarrow S(x)) \Longrightarrow S(\text{Sokrates})$$ "Modus ponens"

Die formale Logik benutzt solche Schlussregeln, um das logische Schließen zu axiomatisieren. Insbesondere untersucht man das Verhalten prädikatenlogischer Formeln unter verschiedenen Interpretationen der Symbole $A(x)$ etc.
In der Mathematik liegt die Interpretation fest und wir schließen intuitiv, also mit

gesundem (mathematischen) Menschenverstand.

2.5 | Mengenlehre und die Sprache der Mathematik

Wir können jetzt die (naive) Mengenlehre prädikatenlogisch durch zwei <u>Axiome</u> (= Aussagen, die als <u>absolut wahr</u> angenommen werden) formulieren. Als Universum nimmt man "alle Objekte unserer Anschauung" und man hat ein zusätzliches logisches Zeichen "$\in$", das die Elementbeziehung formalisiert und stärker bindet als alle logischen Zeichen.

<u>Axiom I</u> (Extensionalität, lat: extensio = Ausdehnung)

$$\forall x \forall y \left(\forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \right).$$

<u>Axiom II</u> (Volle Komprehension, lat: comprehensio = Zusammenfassung)

Für alle prädikatenlogischen Formeln $\phi(z, y_1, \ldots, y_n)$ gilt:

$$\forall y_1 \ldots y_n \, \exists x \, \forall z \, (z \in x \leftrightarrow \phi(z, y_1, \ldots, y_n)).$$

Als Mathematiker formulieren wir etwas lebendiger: [Mathematiker schließen präzise, aber formlos]

I. Seien A, B Mengen. Dann gilt

$$A = B \iff \forall z \, (z \in A \leftrightarrow z \in B)$$

oder sogar

I'. Zwei Mengen A, B sind gleich genau dann, wenn sie die gleichen Elemente haben.

II. Für alle prädikatenlogischen Formeln $\phi(z, y_1, \dots, y_n)$ und $y_1, \dots, y_n$ existiert eine Menge M mit
$$\forall z : (z \in M \iff \phi(z, y_1, \dots, y_n))$$

Bem: Axiom II ist problematisch (→ Russelsche Antinomie) und wird im Axiomensystem ZFC (Zermelo-Fraenkel + Auswahlaxiom) eingeschränkt.

2.6 Geschichte

Aristoteles (~350 v. Chr.)

Gottlob Frege: Begriffsschrift 1879 – unterscheidet zwischen
(Jena) Sinn eines Satzes (Gedanke) und seiner Bedeutung (W/F).

Bertrand Russel: Principia Mathematica 1910 – höhere logische Systeme,
(Cambridge, USA) Typisierung von Mengen.

David Hilbert: Hilbertprogramm 1920 – formale Grundlegung der Mathematik,
(Göttingen) "Wir müssen wissen, wir werden wissen". Beweistheorie

Kurt Gödel: Unvollständigkeitssatz für die Arithmetik 1931
(Wien, Princeton)

Gerhard Gentzen: Peano-Arithmetik + Transfinite Induktion ist widerspruchsfrei 1936

§3. Äquivalenzrelationen

Relationen stellen Beziehungen her zwischen den Elementen einer Menge. Besonders wichtig sind die Äquivalenzrelationen, die es ermöglichen, Elemente miteinander zu identifizieren.

3.1 Relationen

Def: Eine Relation R auf einer Menge M ist eine Teilmenge von $M \times M$.

Bem: Man stellt sich vor, dass ein $x \in M$ bzgl. R mit $y \in M$ "in Beziehung steht" gdw. $(x,y) \in M$. [alternativ über 2-stellige Aussageform $R(x,y) :\Leftrightarrow$ "$(x,y) \in R$"]

Schreibweise: $x, y \in M$ (d.h. $x \in M \wedge y \in M$), dann

$$x \sim_R y \quad \underbrace{:\Longleftrightarrow} \quad (x,y) \in M$$

d.h. diese Äquivalenz definiert die linke Seite. //

3.2 Bsp.

a) $M = \mathbb{Z}$, $R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x < y \}$

d.h. $x \sim_R y \iff x < y$.

b) $M = \mathbb{Z}$, $R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \frac{x-y}{2} \in \mathbb{Z} \}$

d.h. $x \sim_R y \iff$ (x und y sind beide gerade)
oder (x und y sind beide ungerade).

c) $f: M \to N$ sei eine Abbildung.

$R_f := \{(x,y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\}$

d.h. $x \sim_{R_f} y \iff f(x) = f(y)$

<u>beachte</u>: f injektiv $\iff R_f = \{(x,x) \in M \times M \mid x \in M\}$

3.3 Reflexiv, symmetrisch, transitiv – Äquivalenzrelationen

Ziel: M durch R in Teilbereiche einteilen

<u>Def</u>: Eine Relation R auf M heißt

<u>reflexiv</u>, falls $\forall x \in M \quad x \sim_R x$. (d.h. $\forall x \in M \ (x,x) \in R$)

<u>symmetrisch</u>, falls $\forall x,y \in M \ (x \sim_R y \iff y \sim_R x)$ (d.h. $(x,y) \in M \iff (y,x) \in M$)

<u>transitiv</u>, falls $\forall x,y,z \in M \ (x \sim_R y \wedge y \sim_R z \Rightarrow x \sim_R z)$ (d.h. $(x,y) \in M, (y,z) \in M \Rightarrow (x,z) \in M$).

Eine <u>Äquivalenzrelation</u> ist eine reflexive, symmetrische, transitive Relation.

3.4 <u>Bsp</u>: 3.2, a ist transitiv ($x<y, y<z \Rightarrow x<z$), aber weder reflexiv ($x \not< x$) noch symmetrisch ($x<y \Rightarrow y \not< x$).

3.2, b und c sind Äquivalenzrelationen.

<u>Bew. für b)</u>: <u>Reflexivität</u>: Wir müssen zeigen: $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \sim_R x$.

Sei also $x \in \mathbb{Z}$. Nach Definition von R heißt $x \sim_R x$, dass $\frac{x-x}{2} \in \mathbb{Z}$. In der Tat ist $\frac{x-x}{2} = 0$ eine ganze Zahl und daher gilt $x \sim_R x$.

Alternative, formale Formulierung:

Sei $x \in \mathbb{Z}$. Wir müssen zeigen: $x \sim_R x$. Es gilt

$0 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{x-x}{2} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \sim_R x$.

[hier gelten sogar Äquivalenzen, aber nur die angegebene Schlussrichtung wird hier verwendet.]

Symmetrie: Es ist zu zeigen: $\forall x, y \in \mathbb{Z}: \; x \sim_R y \Leftrightarrow y \sim_R x$

Seien also $x, y \in \mathbb{Z}$ und $x \sim_R y$.

Dann $\frac{x-y}{2} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{y-x}{2} = -\frac{y-x}{2} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y \sim_R x$.

Die Umkehrung $y \sim_R x \Rightarrow x \sim_R y$ sieht man genauso oder durch Vertauschen der Bezeichnungen x, y.

Transitivität: Zu zeigen: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: \; x \sim_R y, \; y \sim_R z \Rightarrow x \sim_R z$.

Seien also $x, y, z \in \mathbb{Z}$ und $x \sim_R y$, $y \sim_R z$.

Dann $\frac{x-y}{2} \in \mathbb{Z}$, $\frac{y-z}{2} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{x-z}{2} = \frac{x-y}{2} + \frac{y-z}{2} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \sim_R z$.

$\square$

(Ende des Beweises)

3.5 Äquivalenzklassen

Eine Äquivalenzrelation zerlegt eine Menge in Teilmengen paarweise äquivalenter Elemente: (0.16)

<u>Def:</u> Sei R eine Äquivalenzrelation auf M. Zu $x \in M$ heißt

$$[x]_R := \{ y \in M \mid y \sim_R x \} \subset M$$

[d.h. dies definiert die linke Seite]

die <u>Äquivalenzklasse</u> von x (bezüglich R). $\square$

3.6 <u>Bsp:</u>

In $R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \frac{x-y}{2} \in \mathbb{Z} \}$ aus Bsp 3.2, b gilt:

$$[x]_R = \begin{cases} 2\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \} & \text{, falls } x \text{ gerade} \\ 2\mathbb{Z}+1 = \{ \dots, -3, -1, 1, 3, \dots \} & \text{, falls } x \text{ ungerade.} \end{cases}$$

3.7 <u>Satz:</u>

Sei R eine Äquiv.relation auf M und $x, y \in M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) $x \sim_R y$

2) $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$

3) $[x]_R = [y]_R$.

<u>Bew:</u> Wir zeigen $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

(<u>Ringschluss</u>, nicht zu verwechseln mit dem unzulässigen <u>Zirkelschluss</u>)

<u>$(1) \Rightarrow (3)$:</u> Sei $x \sim_R y$. (A) [wir setzen jetzt Aussage (1) voraus und wollen Aussage (2) zeigen]

Um $[x]_R = [y]_R$ zu schließen, müssen wir zeigen:

$$\forall z \in M \; \big(\overset{(B)}{z \sim_R x} \iff \overset{(C)}{z \sim_R y} \big).$$

"$\Rightarrow$": $z \sim_R x,\ x \sim_R y \Rightarrow z \sim_R y$ (wg. Transitivität)

$(A),\ (B) \Rightarrow (C).$

"$\Leftarrow$": Wegen Symmetrie von R gilt auch $y \sim_R x$. Demnach

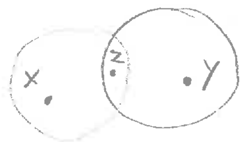
$z \sim_R y,\ y \sim_R x \Rightarrow z \sim_R x$ (wg. Transitivität).

---

(3) $\Rightarrow$ (2): Sei $[x]_R = [y]_R$. (1)

Dann gilt $x \in [x]_R \overset{(A)}{=} [x]_R \cap [y]_R$

$\Rightarrow [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$



(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$.

Dann können wir ein (beliebiges) $z \in [x]_R \cap [y]_R$ wählen.

Es gilt $z \sim_R x,\ z \sim_R y$

$\Rightarrow x \sim_R z,\ z \sim_R y$ (wg. Symmetrie)

$\Rightarrow x \sim_R y.$ (wg. Transitivität) $\square$

3.8 | (Mengen-) Partitionen

Satz 3.7 zeigt, dass M durch R in <u>paarweise disjunkte</u> Teilmengen <u>aufgeteilt</u> wird.

<u>Def:</u> Eine <u>Partition</u> P einer Menge M ist eine Menge von Teilmengen von M, d.h. $P \subset \mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subset M\}$, mit den Eigenschaften

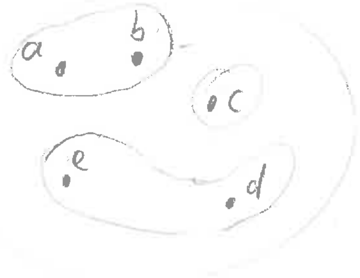
(i) $\forall A, B \in P,\ A \neq B : A \cap B = \emptyset$ (die Teilmengen sind paarweise disjunkt)

(ii) $\bigcup\limits_{A \in P} = M$ (die Teilmengen überdecken M)

<u>Notation:</u> $\bigcup\limits_{A \in P} A := \{x \in M \mid \exists A \in P : x \in A\}$

<u>Bsp:</u> $M = \{a, b, c, d, e\}$

$P = \{\{a,b\}, \{c\}, \{d,e\}\}$



3.9 | Partitionen und Äquivalenzrelationen

Die von einer Äquivalenzrelation $R \subset M \times M$ <u>induzierte</u> (d.h. durch den vorher angegebenen Prozess der Zerlegung in Äquivalenzklassen gegebene) Partition ist

$$P_R := \{[x]_R \mid x \in M\}.$$

Umgekehrt definiert eine Partition P von M die Äquivalenzrelation

$$R_P := \{(x,y) \mid \exists A \in P : \{x,y\} \subset A\}.$$

Satz: Sei M eine Menge. Dann definiert die Zuordnung

(D.19)

$$\Phi : R \longmapsto P_R$$

eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzrelationen auf M und der Menge der Partitionen von M.

Bew: Wir behaupten, dass

$$\Psi : P \longrightarrow R_P$$

die Umkehrabbildung zu Φ ist, das heißt

(1) $\Phi \circ \Psi = Id_{\{\text{Partitionen von } M\}}$ (die Identitätsabb. auf der Menge der Partitionen von M)

(2) $\Psi \circ \Phi = Id_{\{\text{Äqu.vel. auf } M\}}$. (...)

M.a.W., wir müssen zeigen:

(1) Ist P eine Partition von M, so ist

$$\boxed{P} = (\Phi \circ \Psi)(P) = \Phi(\Psi(P)) = \Phi(R_P) = \boxed{P_{R_P}}.$$

(2) Ist R eine Äquivalenzrelation auf M, so ist

$$\boxed{R} = (\Psi \circ \Phi)(R) = \boxed{R_{P_R}}.$$

Bew von (1): $P_{R_P} = \{ [x]_{R_P} \mid x \in M \}$

Es bleibt demnach zu zeigen, dass die Äquivalenzklassen von R_P genau die Elemente von P sind.

Sei also $x \in M$.

P Partition von $M \Rightarrow \exists B \in P : x \in B$.

Dann $[x]_{R_P} = B$:

$[x]_{R_P} \subset B$: $\quad y \in [x]_{R_P} \Rightarrow y \sim_{R_P} x$

$\Rightarrow \exists C \in P,\ \{x,y\} \subset C$

$\Rightarrow B \cap C \neq \emptyset$ (denn $x \in B \cap C$)

$\Rightarrow C = B$ (denn P ist eine Partition).

$\Rightarrow y \in B$.

$[x]_{R_P} \supset B$: $\quad y \in B$

$\Rightarrow \{y,x\} \subset B$

$\Rightarrow y \sim_{R_P} x$

$\Rightarrow y \in [x]_{R_P}$.

Bew. von (2): $\quad R_{P_R} = \{(x,y) \in M \times M \mid \exists A \in P_R : \{x,y\} \subset A\}$.

d.h. $x \sim_{R_{P_R}} y \iff \exists A \in P_R : \{x,y\} \subset A$.

$\iff \exists z \in M : \{x,y\} \subset [z]_R \quad (A = [z]_R)$.

$$\iff \exists z \in M : \quad x \sim_R z, \ y \sim_R z$$

$$\overset{(*)}{\iff} \quad x \sim_R y. \qquad \square$$

<u>Bem:</u> Vorsicht bei Äquivalenzen – man muss sauber die Gültigkeit beider Schlussrichtungen verifizieren.

Etwa für $(*)$:

<u>"$\Rightarrow$"</u>: $\exists z \in M : x \sim_R z, \ y \sim_R z$

$\Rightarrow \exists z \in M : x \sim_R z, \ z \sim_R y$ (Symmetrie)

$\Rightarrow x \sim_R y$ (Transitivität)

<u>"$\Leftarrow$"</u>: $x \sim_R y$

$\Rightarrow \exists z \in M : x \sim_R z, \ y \sim_R z$ (wähle $z := y$; $z \sim_R z$ wegen Reflexivität).

3.10 Die Quotientenmenge und Quotientenabbildung

Die einer Äquivalenzrelation R auf einer Menge M zugeordnete Partition wird auch die <u>Quotientenmenge</u> von M nach R genannt.

<u>Bezeichnung:</u> $M/\sim_R$ oder M/R. (auch: <u>Faktormenge</u>)

<u>(Rein psychologische) Schwierigkeit:</u> Die <u>Elemente</u> von M/R sind Mengen, nämlich Teilmengen von M.

Man hat eine <u>kanonische</u> (d.h. unter vielen Wahlen <u>eindeutig</u> ausgezeichnete) Surjektion,

$$q_R : M \longrightarrow M/R \;, \quad x \longmapsto [x]_R \,.$$

die <u>Quotientenabbildung</u>. Sie hat die Eigenschaft:

$$\forall x,y \in M : \left(x \sim_R y \iff q_R(x) = q_R(y) \right).$$

Die Quotientenabb. leistet also die (geistige) Zusammenfassung der durch R in Relation stehenden Elemente von M, indem sie äquivalente Elemente auf das gleiche Bildelement abbildet. Sie ist <u>universell</u> unter allen solchen Abbildungen in folgendem Sinn:

<u>3.11</u> Die "universelle" Eigenschaft der Quotientenabbildung

<u>Satz:</u> Sei R eine Äquivalenzrelation auf M und

$$f : M \to N$$

eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$x \sim_R y \implies f(x) = f(y). \qquad (Q)$$

Dann gibt es <u>genau eine</u> Abbildung

$$\bar{f} : M/R \longrightarrow N$$

mit der Eigenschaft $\quad f = \bar{f} \circ q_R$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_R"'] & N \\
M/R \arrow[ur, dashed, "\exists!\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

(eindeutige Existenz)

Bem: $\bar{f}$ heißt die durch f <u>induzierte Abbildung</u>.

0.23

Bew: 1. Definition von $\bar{f}$

Sei $A \in M/R$.

Definiere: $\bar{f}(A) := f(x)$ für (irgend-) ein $x \in A$, d.h. für ein x mit $A = q_R(x)$.

Diese Definition scheint problematisch, da sie a priori von der Wahl von x abhängt. Ist aber $x' \in A$, so gilt

$$x' \sim_R x \implies f(x') = f(x) \quad \text{nach (Q)}.$$

M.a.W.: (Q) zeigt, dass $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset N$ nur aus einem Element b besteht. Wir definieren $\bar{f}(A) := b$.

2. Verifikation von $f = \bar{f} \circ q_R$

Für $x \in M$ gilt nach Def. von $\bar{f}$:

$$(\bar{f} \circ q_R)(x) = \bar{f}([x]_R) = f(x).$$

3. Eindeutigkeit von $\bar{f}$

[Diese folgt aus $f = \bar{f} \circ q_R$ zusammen mit der Surjektivität von q_R:]

Sei $g: M/R \to N$ eine Abb. mit $f = g \circ q_R$.

Zu zeigen ist $g = \bar{f}$, d.h. $\forall y \in M/R: g(y) = \bar{f}(y)$.

Für $y \in M/R$ existiert $x \in M$ mit $y = [x]_R$.

Dann gilt $g(y) = (g \circ q_R)(x) = f(x) = (\bar{f} \circ q_R)(x) = \bar{f}(y)$.

□

3.12 Bsp: $M = \{a,b,c,d,e\}$

$M/R = P = \{A,B,C\}$, $A = \{a,b\}$, $B = \{c\}$, $C = \{d,e\}$

$f: M \to N = \{1,2,3\}$

a	b	c	d	e
1	1	1	3	3

Dann $\bar{f}(A) = 1$, $\bar{f}(B) = 1$, $\bar{f}(C) = 3$, $\bar{f}: \{A,B,C\} \to N$

3.13 Die Äquivalenzrelation zu einer Abbildung

Eine Abbildung $f: M \to N$ definiert eine Äquivalenzrelation durch

$$R_f := \{(x,y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\}. \qquad (\to \text{Bsp. } 3.2, c)$$

Die Äquivalenzklassen sind genau die Fasern

$$f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in M \mid f(x) = y\}, \quad y \in N$$

von f.

Jede Äquivalenzrelation tritt auf diese Weise auf, denn $R = R_{q_R}$:

$$R_{q_R} = \{(x,y) \in M \times M \mid q_R(x) = q_R(y)\}$$
$$= \{(x,y) \mid x \sim_R y\} = R$$

3.14 Anwendung: Faktorisierung von Abbildungen. | weglassen

Satz: Jede Abbildung $f: M \to N$ faktorisiert kanonisch in

1) die Surjektion $q_{R_f}: M \to M/R_f$

2) eine Bijektion $g: M/R_f \longrightarrow \operatorname{im} f$.

3) die Injektion $\imath: \operatorname{im} f \longrightarrow N$ (Inklusion)

Bew: Satz 3.11, angewendet auf f und $R = R_f$, liefert

$$\bar{f}: M/R_f \longrightarrow N \quad \text{mit} \quad f = \bar{f} \circ q_{R_f}. \qquad (A)$$

Lemma (=Hilfssatz): $\bar{f}$ ist injektiv.

Bew: Seien $x, y \in M$ mit $\bar{f}([x]_{R_f}) = \bar{f}([y]_{R_f})$.

$$\Rightarrow \quad f(x) = \bar{f}([x]_{R_f}) = \bar{f}([y]_{R_f}) = f(y)$$

$$\Rightarrow \quad x \sim_R y$$

$$\Rightarrow \quad [x]_{R_f} = [y]_{R_f}. \qquad \square$$

Definiere $g: M/R_f \longrightarrow \operatorname{im} f = \operatorname{im} \bar{f}$,

$$[x]_{R_f} \longmapsto \bar{f}([x]_{R_f}) = f(x).$$

Offensichtlich gilt $\bar{f} = \imath \circ g$.

$$\overset{(A)}{\Longrightarrow} \quad f = \imath \circ g \circ q_{R_f}. \qquad \square$$

Bild:

$$M \underset{\text{surj.}}{\xrightarrow{q_{R_f}}} M/R_f \underset{\text{bij.}}{\xrightarrow{g}} \operatorname{im} f \underset{\text{inj.}}{\xrightarrow{\imath}} N.$$

Etwa in Bsp. 3.12:

$$\begin{array}{ccccccc} M & \longrightarrow & M/R_f & \longrightarrow & \operatorname{im} f & \longrightarrow & N \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \{a,b,c,d,e\} & & \{A,B,C\} & & \{1,2\} & & \{1,2,3\} \end{array}$$

3.15 Zusammenfassung

Wir haben 3 äquivalente Beschreibungen von Äquivalenzrelationen:

1) Als Relation $R \subset M \times M$ mit Reflexivität, Symmetrie, Transitivität.

2) Als Partition $P \subset \mathcal{P}(M)$: $M = \bigcup_{A \in P} A$

3) Durch Fasern einer Surjektion $f: M \to N$;
nach Satz 3.14 gibt es dann eine kanonische Bijektion $g: M/R_f \to N$ so, dass $f = g \circ q_{R_f}$. Bis auf Umbenennung der Elemente von N "ist" also f die Quotientenabbildung.