Mathematik IV für Studierende der Physik

Dr. Vsevolod Shevchishin

Universität Hamburg
Sommersemester 2010

Vorbemerkungen und Allemeine Information

Dies ist ein Skript zur Vorlesung

Mathematik IV für Studierende der Physik

Vorlesung

Mi. 8:15–9:45, Hörsaal H4, Geomatikum (Bundesstraße 55),
Fr. 8:15–9:45, Hörsaal H2, Geomatikum (Bundesstraße 55)

Übungsgruppen: Geomatikum (Bundesstraße 55)

1. Mi. 10–12, Raum 432, Dr. Christian Böhning
2. Mi. 10–12, Raum 1241, Dr. Christian Böhning
3. Mi. 12–14, Raum 432, Shevchishin
4. Der Termin wird verlegt! Siehe Web-Seite!

Tutorien: (ab 2, Vorsesungswoche), Jungiusstraße 9

1. Mo 08:30–10.30, SemRm 1
2. Mi 17.00-19.00 SemRm 1

Jungiusstraße 9, rechter Treppenaufgang, I. Stock.

Tutoren: Niklas Hübel & Christian Pfeifer

Themen der Vorlesung

I. **Funktionentheorie**: Theorie der Funktionen einer und mehrerer komplexen Veränderlichen.

II. **Funktionalanalysis**: Banach- und Hilbert-Räume, Spektraltheorie.

Literatur

Zur Thema I.: **Funktionentheorie**

[Fi-Lie] W. Fischer, I Lieb; *Funktionentheorie*, Vieweg Verlag, 4. Auflage, 1985, 10. Auflage, 2009.

[Rud] Walter Rudin; *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970

[Rem] Reinhold Remmert; *Funktionentheorie 1*, Springer Verlag, 3. Auflage, 1992.

I. Funktionentheorie

1. Der Körper $\mathbb{C}$ komplexer Zahlen

Der Körper $\mathbb{R}$ reeller Zahlen und seine Haupteigenschaften (algebraische und topologische), sowie Haupteigenschaften von Euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ werden als (gut?) bekannt betrachtet.

Motivation. Der Hauptgrund, komplexe Zahlen einzuführen, war das Problem, für jede polynomiale Gleichung $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$, insbesondere für jede quadratische Gleichung $a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$, eine Lösung zu finden / zu haben. Die Formel

$$z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}$$

für die Lösungen der quadratischen Gleichung funktioniert nur dann, wenn der Wurzel $\sqrt{\Delta}$ aus der Diskriminante $\Delta := a_1^2 - 4a_0 a_2$ existiert (als eine reelle Zahl). Und dies gilt nicht immer. Also braucht man die Menge reeller Zahlen zu erweitern, um die Lösungen polynomialer Gleichungen zu konstruieren. Insbesondere muss man zumindest mit dem Wurzel $\sqrt{-1} =: \mathbf{i}$ die Menge $\mathbb{R}$ erweitern, um jede quadratische Gleichung zu lösen.
Es hat sich herausgestellt, und wurde relativ früh erkannt, dass dies auch hinreichend ist: Mit der Einführung von $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ bekommt *jede* polynomiale Gleichung eine Lösung. Diese Aussage ist bekannt als *Hauptsatz der Algebra.* Damit hat jede solche Lösung z einer polynomialen Gleichung die Form $x + y \cdot \mathbf{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, wobei die Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ durch die Regel $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1$ bestimmt wird. Dabei

werden übliche Zahlen „reell" genannt, also „richtige", „tatsächlich existierende Größen". Die formale „symbolische Lösung"[1] $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$ der Gleichung $z^2=-1$ dagegen bekommt den Namen **imaginäre Einheit**, und das allgemeine Konstrukt $x+y\cdot\mathbf{i}$ den Namen **komplexe Zahl**. Die Formalisierung führt zur folgenden

Definition 1.1 (Komplexe Zahlen)

Die **komplexe Zahlen** *sind die Ausdrücke $z=x+\mathbf{i}y$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ versehen mit der Operationen*
Addition: $(x_1+\mathbf{i}y_1)+(x_2+\mathbf{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathbf{i}(y_1+y_2)$, *und*
Multiplikation: $(x_1+\mathbf{i}y_1)\cdot(x_2+\mathbf{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathbf{i}(x_1y_2+x_2y_1)$.
Die Komponenten x,y werden **Realteil** *und* **Imaginärteil** *genannt und mit $\Re(z)$ bzw. $\Im(z)$ bezeichnet. Die Menge aller komplexer Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Die Ausdrücke $x+\mathbf{i}0$ und $0+\mathbf{i}y$ werden zu x und $\mathbf{i}y$ und gekürzt, die entsprechenden komplexen Zahlen heißen* **reell** *und bzw.* **rein imaginär**.

Satz 1.1 (Körper der komplexen Zahlen)

Komplexe Zahlen mit den Operationen von oben bilden einen kommutativen algebraischen Körper. Dies bedeutet insbesondere:

(A1) $z_1+z_2=z_2+z_1$; (A2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;

(A3) $0+z=z+0=z$; (A4) $(x+\mathbf{i}y)+(-x+\mathbf{i}(-y))=0$;

(M1) $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$; (M2) $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$; (M3) $1\cdot z=z\cdot 1=z$;

(M4) *für jedes* $z=x+\mathbf{i}y\neq 0$ *existiert* $w=z^{-1}=\frac{x-\mathbf{i}y}{x^2+y^2}$ *mit* $z\cdot w=w\cdot z=1$;

(D) $(z_1+z_2)\cdot w=w\cdot(z_1+z_2)=z_1\cdot w+z_2\cdot w$.

[1] Die modernen Software-Paketen wie Maple und Matematica funktionieren im wesentlichen auf dem gleichen Prinzip „symbolische Rechnung".

Beweis. Die allen Eigenschaften sind offensichtlich oder können explizit überprüfen werden. □

Definition 1.2 (Konjugation und Norm komplexer Zahlen)

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathbf{i}y$ *definiert man die* **konjugierte komplexe Zahl** *durch* $\bar{z} := x - \mathbf{i}y$ *und die* **Norm** $|z|$ *durch* $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. *Die Norm wird auch* **Betrag** *oder (der)* **Modul** *genannt.*

Lemma 1.2 (Eigenschaften der Norm)

Die Norm hat die folgenden Eigenschaften:

(N0) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; (N1) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

(N2) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ **(Dreiecksungleichung.)**

Definition 1.3 (Die Ebene komplexer Zahlen)

Zur Veranschaulichung wird jede komplexe Zahl $z = x + \mathbf{i}y$ *mit dem Vektor* (x, y) *in der Euklidischen Ebene* $\mathbb{R}^2$ *identifiziert, und umgekehrt. Diese geometrische Interpretation der Menge komplexer Zahlen wird die* **komplexe (Zahl)Ebene** *oder* **Gaußsche Zahlebene** *genannt. Dabei heißen die x- bzw. y-Achsen die* **reelle** *und bzw.* **imaginäre Achse**.

Dabei wird die Norm $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ zur Länge/Betrag des Vektors (x, y), und das (reelle) Skalarprodukt $\langle z, w \rangle$ kann mit der Formel $\Re(z\bar{w}) = \Re(\bar{z}w)$ definiert werden.

Erinnerung. Die Polarkoordinaten eines Punktes $(x, y) \neq 0$ auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind Radius $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ und der Winkel φ zwischen der positiven x-Achse und dem Strahl von 0 durch den Punktes (x, y).

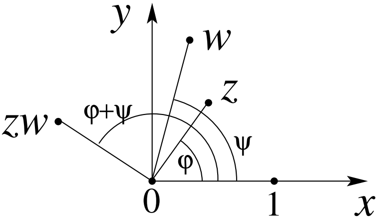

Abbildung 1: Polardarstellung und Winkeladdition.

Polardarstellung komplexer Zahlen

Die Polardarstellung einer komplexen Zahl $z = x + \mathbf{i}y \neq 0$ mit Polarkoordinaten (r, φ) auf der komplexen Zahlebene $\mathbb{C}$ ist $z = r\cdot(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) = r\, e^{\mathbf{i}\varphi}$. Dabei ist der Radius r die Norm $|z|$ ($\Leftrightarrow$ Betrag $\Leftrightarrow$ Modul). Die Winkelkoordinate $\varphi =: \arg(z)$ heißt **das Argument** der komplexen Zahl z und ist eindeutig bis $k\cdot 2\pi$ definiert. Normaleweise wählt/normiert man das Argument mit der Bedingung $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ oder $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Bemerkung. Später werden wir zeigen, dass die Funktion e^z für alle komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ wohl-definiert ist, die Eigenschaft $e^{z+w} = e^z\cdot e^w$ hat, und die *Eulersche Formel* $e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$ für reelle φ erfüllt.

Lemma 1.3 (Multiplikation komplexer Zahlen in der Polardarstellung.)

Es gilt: $r_1 e^{\mathbf{i}\varphi_1} \cdot r_2 e^{\mathbf{i}\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{\mathbf{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Beweis. Man braucht die Formel $(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)\cdot(\cos\psi + \mathbf{i}\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + \mathbf{i}\sin(\varphi+\psi)$. Um diese zu beweisen, benutze man die Additionssätze für trigonometrische Funktionen und verifiziere explizit die gewünschte Formel.
Alternative Möglichkeit (was wir später tun werden) ist zu zeigen die Eulersche Formel $e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$ mit Hilfe der Taylor-Reihen von entsprechenden Funktionen. □

Folgerung: Geometrische Bedeutung der komplexen Multiplikation

Für $w \neq 0 \in \mathbb{C}$ besteht die Abbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto w\cdot z \in \mathbb{C}$ aus:

(i) Drehung um den Winkel $\varphi = \arg(w)$;

(ii) Ausdehnung/Streckung mit dem Koeffizienten $r = |w|$.

Definition 1.4 (Komplexe Polynome)

Ein **komplexes Polynom** *von Variablen* $z_1, \dots, z_n$ *ist eine endliche Summe* $P(z) = \sum_I a_I z_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{i_n}$ *mit* $I = (i_1, \dots, i_n)$ *ein Multiindex und mit komplexen Koeffizienten* a_I*, und auch die dadurch definierte Funktion/Abbildung* $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.
Eine **Nullstelle** *eines Polynoms* $P(z_1, \dots, z_n)$ *ist ein Punkt* $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ *mit* $P(a) = 0$.

Eine der wichtigsten Eigenschaften des Körpers $\mathbb{C}$ komplexer Zahlen ist die **algebraische Abgeschlossenheit** gegeben durch den folgenden

Satz 1.4 (Hauptsatz der Algebra)

Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_{d-1} z + a_d$ hat eine Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ und deshalb lässt sich zerlegen in lineare Faktoren $p(z) = a_0(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_d)$.

Vergleich von (algebraischen) Eigenschaften von reellen und komplexen Zahlen

Beide Mengen mit der üblichen algebraischen Operationen sind kommutative algebraische Körper. Beide haben die Norm / den Betrag $|x|$ bzw. $|z|$, die zur Definition der Topologie / Konvergenz benutzt werden kann. Beide sind **vollständig**, dass heißt jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ konvergiert.
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, $\mathbb{R}$ dagegen hat die **Ordnung**-Relation „$\leqslant$“: Für jede zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ kann man sagen, welche von ihnen größer ist: $a \leqslant b$ oder $b \leqslant a$.

2. Topologie und Gebiete in $\mathbb{C}$.

Der **komplexe Euklidische Raum** $\mathbb{C}^n$ ist das Produkt $\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}$ von n Kopien von $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}^n$ ist ein *komplexer* Vektorraum, isomorph zu $\mathbb{R}^{2n}$ als ein reeller VRaum. Der Raum $\mathbb{C}^n$ wird mit dem **Hermiteschen Skalarprodukt**

$$\vec{z} = (z_1, \dots, z_n), \vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto \langle z, w\rangle := \sum_{j=1}^n \bar{z}_j w_j .$$

Der Realteil $\langle z, w\rangle_{\mathbb{R}} := \Re(\langle z, w\rangle)$ ist das „gewöhnliche“ reelle Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{2n}$. Dabei ist das Quadrat $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$ das Normquadrat $\|\vec{v}\|^2$ des Vektors $\vec{v}$.
Die Norm in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^n$ definiert die natürliche **Abstandsfunktion** $d(z, w) := ||z - w||$ und damit macht $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^n$ zu einem metrischen Raum. Die Bälle in $\mathbb{C}$ bzgl. dieser Abstandsfunktion sind Kreisscheiben / Disken
$\Delta(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} = \Delta_R(z_0)$. Die Einheitskreisscheibe $\Delta(0, 1) = \{|z| < 1\}$ wird mit Δ bezeichnet. In höherer Dimension $\mathbb{C}^n$ mit $n \geqslant 2$ benutzt man die Notation $B(\vec{v}, R)$ für die Bälle, und betrachtet andere spezielle „ballformige“ Mengen: **Polyzylinder** (auch **Polydisks** genannt). Dies sind Produkte $\Delta(z_1, r_1)\times\cdots\times\Delta(z_n, r_n)$ und werden mit $\Delta^n(z, \vec{r})$ bezeichnet, dabei heißt $z = (z_1, \dots, z_n)$ der **Mittelpunkt** / das **Zentrum** und $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$ der **Polyradius** (oder **Multiradius**) des Polyzylinders $\Delta^n(z, \vec{r})$. In dem Fall $r_i = r$ schreibt man $\Delta^n(z, r)$ und nennt r **Radius.** Die Menge $\Delta^2(z, \vec{r})$ $(n = 2)$ heißt **Bizylinder.**

Eine Teilmenge U in $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist **offen** falls sie als Vereinigung von Bällen (in $\mathbb{C}$ Kreisscheiben) dargestellt werden kann (Unendliche aber abzählbare Vereinigung reichen). Ein **Gebiet** ist eine offene *zusammenhängende* Menge $G \subset \mathbb{C}$, d.h., jede zwei Punkte in G können mit einem Weg / Pfad verbunden werden.

Erinnerung. Die Definitionen von **Abstandsfunktion**, eines **metrischen Raums**, von **Konvergenz** einer Folge in einem metrischen Raum, einer **Cauchy-Folge** in einem metrischen Raum, eines **vollständigen metrischen Raums**, eines **normierten Vektorraums** und eines **Banach-Raums** kann man z.B. im Skript der Vorlesung *Mathematik für Physiker III,*(Dies ist ein Hyperlink) S. 24ff. finden.

Definition 1.5 (Abschluss einer Menge. Rand eines Gebietes)

Der **Abschluss** *eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d_X) (z.B. $\mathbb{C}$ mit $d_{\mathbb{C}}(z,w) := |z-w|$) ist die Menge $\overline{A} \subset X$ von Grenzwerten $\lim x_\nu$ von Folgen aus A. Anders gesagt, $x \in \overline{A} \iff \exists$ Folge $x_\nu \in A$ mit $x = \lim x_\nu$. Damit gilt immer $A \subset \overline{A}$. Außerdem gilt es immer $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.*
Eine Teilmenge $A \subset (X, d_X)$ ist **abgeschlossen** $\iff A = \overline{A}$.
Der **Rand** *einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ (z.B. eines Gebietes $G \subset \mathbb{R}^n$) ist die Menge $\partial U := \overline{U} \setminus U$. Das sind genau die Punkte, die in U nicht liegen, aber mit einer Folge aus U erreicht werden können.*

Tatsachen. 1. $A \subset (X, d_X)$ ist abgeschlossen $\iff U := X \setminus A$ ist offen.
2. $U \subset \mathbb{R}^n$ ist offen $\Rightarrow V := \mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$ ist auch offen und $\partial U = \partial V$.

Definition 1.6 (Kompakte Mengen)

Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d_X) (z.B., eines normierten Raumes $(V, \|\cdot\|_V)$) heißt **kompakt** *oder ein* **Kompaktum**, *falls jede Folge x_ν aus K eine Teilfolge x_{ν_k} zulässt, die den Grenzwert $\lim_{k \longrightarrow \infty} x_{\nu_k}$ in K besitzt. (Für Details siehe [Rem], Kap. 0, § 2.)*

Satz 1.5 (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^n$.)

(Top1) *Die Räume $\mathbb{R}^n$, und insbesondere $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^n$, sind vollständig bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ und damit Banach-Räume.*

(Top2) *Eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$, und insbesondere von $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}^n$, ist kompakt $\Longleftrightarrow$ K ist beschränkt und abgeschlossen.*

Konvergenz von Funktionsfolgen

Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $f_\nu(x)$ eine Funktionsfolge auf X mit Werten in $\mathbb{C}$. Außerdem sei μ ein Maß auf X (z.B., Lebesgue-Maß auf Gebieten $G \subset \mathbb{R}^n$). Wir werden die folgenden Konvergenzarten von $f_\nu(x)$ betrachten.

1. Punktweise Konvergenz: $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = f(x)$ für jedes $x \in X$.

2. Konvergenz fast überall: $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ außer einer μ-Nullmenge $N \subset X$.

3. L^p-Konvergenz: $\lim_{\nu\to\infty} \|f_\nu(x) - f(x)\|_{L^p(X,\mu)} = 0$

4. Gleichmäßige Konvergenz: $\lim_{\nu\to\infty} \|f_\nu(x) - f(x)\|_{\sup} = 0$.

5. Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen: Für jede *kompakte* Teilmenge $K \subset X$ gilt: $\lim_{\nu\to\infty} \|f_\nu(x) - f(x)\|_{\sup (x\in K)} = 0$.

Später bei der Untersuchung von holomorphen Funktionen die letzten zwei Konvergenzarten werden besonders wichtig.

3. Analytische Funktionen. Potenzreihen.

Definition 1.7 (Potenzreihen)

Eine (formale) **Potenzreihe** *ist eine unendliche Summe der Form* $\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{\infty} a_I\cdot(z_1-z_1^*)^{i_1}\cdot\ldots\cdot(z_n-z_n^*)^{i_n}$*. Dabei heißen* $z^*:=(z_1^*,\dots,z_n^*)$ *der* **Entwicklungspunkt**, $z=(z_1,\dots,z_n)$ **Variablen/Veränderlichen**, *die einzelnen Produkte* $a_I\cdot(z_1-z_1^*)^{i_1}\cdot\ldots\cdot(z_n-z_n^*)^{i_n}=: a_I\cdot(z-z^*)^I$ **Reihenglieder** *oder* **Terme**, $a_I=a_{(i_1,\dots,i_n)}$ **Koeffizienten** *der Potenzreihe,* $|I|:=i_1+\cdots+i_n$ *der* **Grad** *des Terms* $a_I\cdot(z-z^*)^I$*. Die Teilsumme* $\sum_{|I|=d} a_I\cdot(z-z^*)^I$ *heißt die* **homogene Komponente** *(oder* **homogener Teil***) der Reihe von Grad d. Die Reihe ist* **endlich** *falls nur endlich viele Koeffizienten* a_I *nicht Null sind. Endliche Reihen sind Polynome.*

Wir betrachten meistens komplexe oder reelle Polynome, d.h., Koeffizienten a_I sind komplex oder reell. Man merke, dass die Koordinaten z_i^* des Entwicklungspunktes auch als (unabhängige) Variablen/Veränderlichen betrachtet werden können.

Die Menge der Potenzreihen der Form $\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{\infty} a_I\cdot z_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{i_n}$ mit komplexen Koeffizienten bezeichnet man mit $\mathbb{C}[[z_1,\dots,z_n]]$ und nennt die **Algebra formaler Potenzreihen.**

Lemma 1.6

Die Menge komplexer Potenzreihen mit einem festen Entwicklungspunkt z^* *bilden eine Algebra über* $\mathbb{C}$*, d.h., man kann solche Reihen addieren und miteinander und mit einem Skalar* $a\in\mathbb{C}$ *Multiplizieren. Eine solche Reihe ist invertierbar gdw. der* **freie Koeffizient** a_0 *(= freie Term) nicht Null ist.*

Beweis. Die Aussage über die Addition und Multiplikation mit einem Skalar ist offensichtlich. Beim Berechnen des Produktes zweier Potenzreihen $f = \sum_I a_I \cdot (z - z^*)^I$ und $g = \sum_I b_I \cdot (z - z^*)^I$ umgruppieren wir diese in homogene Komponenten: $f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|I|=i} a_I \cdot (z - z^*)^I$ und $g = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|I|=i} b_I \cdot (z - z^*)^I$. Dann wird das Produkt wie folgt umgruppiert: $f \cdot g = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{d} \sum_{|I|=i,|J|=d-i} a_I b_J \cdot (z - z^*)^{I+J}$. Also bekommt man eine unendliche Reihe von *endlichen(!)* Summen, und jede diese Summe ist die homogene Komponente des Produktes. Damit ist das Produkt wohl-definiert. Um eine Reihe $f = \sum_I a_I \cdot (z - z^*)^I$ mit $a_0 \neq 0$ zu invertieren, schreiben wir die Reihe in der Form $f = a_0 (1 + a_0^{-1} \sum_{|I| \geqslant 1} a_I \cdot (z - z^*)^I)$ und bezeichnen $f_0 := a_0^{-1} \sum_{|I| \geqslant 1} a_I \cdot (z - z^*)^I$. Damit lässt sich f^{-1} mit der Hilfe der Formel der geometrischen Reihe wie folgt repräsentieren: $f^{-1} = a^{-1} \cdot (1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_0^k)$. Für jedes $k \geqslant 1$ ist die Potenz f_0^k der Reihe f_0 wohl-definiert. Die einfache aber wichtige Beobachtung ist, dass homogene Komponenten von Grad $d < k$ jeder Potenz f_0^k verschwinden. Damit hat die unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_0^k$ nur endlich viele Summanden in von jedem vorgegebenen Grad d. Dies zeigt, dass die Summe $f^{-1} = a^{-1} \cdot (1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_0^k)$ wohl-definiert ist. $\square$

Konvergenz numerischer Reihen

Erinnerung. Eine numerische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (mit a_i in einem Banachraum $(V, \|\cdot\|_V)$, meistens in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) **konvergiert** falls der Limes $\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} a_i$ existiert, und **absolut konvergiert** falls die die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\|_V$ (bzw. $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ für $a_i \in \mathbb{C}$) konvergiert. Der Limes $\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} a_i$ heißt die **Summe** der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Eine absolut konvergierte Reihe ist konvergent, und die Summe einer solchen Reihe ist unabhängig von beliebigen Umtausch von Summanden.

Definition 1.8 (Konvergenz von Potenzreihen. Analytische Funktionen)

Eine Potenzreihe $f = \sum_I a_I \cdot (z - z^*)^I$ **konvergiert** *in einem Punkt* $w = (w_1, \dots, w_n)$ *falls die numerische Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{|I|=i} a_I \cdot (w - z^*)^I \right)$ *konvergiert. Die Potenzreihe* $f = \sum_I a_I \cdot (z - z^*)^I$ **absolut konvergiert** *im Punkt* $w = (w_1, \dots, w_n)$ *falls die numerische Reihe* $f = \sum_I |a_I \cdot (z - z^*)^I|$ *absolut konvergiert. Eine Potenzreihe* $f = \sum_I a_I \cdot (z - z^*)^I$ *heißt* **konvergent** *falls es ein* $\varepsilon > 0$ *existiert, so dass die Reihe* f *in jedem* w *mit* $|w - z^*| < \varepsilon$ *absolut konvergiert.*

Eine Funktion (reell oder komplex) $F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$ *in einem Gebiet* $G \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* **reell-analytisch** *falls* $\forall x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in G\ \exists \varepsilon > 0\ \exists$ *Potenzreihe* $f = \sum_I a_I \cdot (x - x^*)^I$ *(mit reellen bzw. komplexen Koeffizienten* a_I*) die für alle* x *mit* $|x - x^*| < \varepsilon$ *zu* $F(x)$ *absolut konvergiert.*

Eine Funktion $F(z) = F(z_1, \dots, z_n)$ *in einem Gebiet* $G \subset \mathbb{C}^n$ *heißt* **komplex-analytisch** *falls* $\forall z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*) \in G\ \exists \varepsilon > 0\ \exists$ *komplexe Potenzreihe* $f = \sum_I a_I \cdot (z - z^*)^I$ *die für alle* z *mit* $|z - z^*| < \varepsilon$ *zu* $F(z)$ *absolut konvergiert.*

In beiden Fällen heißt die entsprechende Reihe $\sum_I a_I \cdot (x - x^*)^I$ *bzw.* $\sum_I a_I \cdot (z - z^*)^I$ *die* **Entwicklungsreihe** *oder* **(Potenzreihe)entwicklung** *der Funktion* F *um den* **(Entwicklungs)punkt** x^* *bzw.* z^*.

Lemma 1.7 (Konvergenzradius einer Potenzreihe)

Für jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z^*)^n$ *in einer komplexen Variablen* z *existiert ein eindeutiges* $R \in [0, +\infty]$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(KR1) Die Reihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z^*)^n$ *absolut konvergiert für alle* z *mit* $|z - z^*| < R$;

(KR2) Die Reihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z^*)^n$ *divergiert für alle* z *mit* $|z - z^*| > R$.

Beweis. Es sei $R := \sup\{r \geqslant 0 : \text{die Folge } |a_n|\cdot r^n \text{ ist beschränkt}\}$. Dann $\forall r > R$ ist die Folge $|a_n|\cdot r^n$ nicht beschränkt, und folglich kann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-z^*)^n$ mit $|z-z^*| = r$ nicht konvergieren (da das Verschwinden $|a_n\cdot(z-z^*)^n| \longrightarrow 0$ eine notwendige Bedingung für Konvergenz ist).
Nun sei $r < R$. Fixiere ρ mit $r < \rho < R$. Dann ist die Folge $|a_n|\cdot\rho^n$ beschränkt. Es sei $M := \sup\{|a_n|\cdot\rho^n\}$. Dann $|a_n|\cdot r^n \leqslant M\cdot\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ und damit $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\cdot(z-z^*)^n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} M\cdot\left(\frac{r}{\rho}\right)^n = \frac{M}{1-r/\rho} < +\infty$ für alle z mit $|z-z^*| = r$. $\square$

Folgerung: Cauchy-Hadamard-Formel.

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-z^*)^n$ kann mit der **Cauchy-Hadamard-Formel**

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = \liminf_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$

berechnet werden.

Satz 1.8 (Glattheit und Taylor-Reihen analytischer Funktionen)

i) Jede reell-analytische Funktion $F(x)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ ist glatt, d.h., unendlich differenzierbar. Darüber hinaus, für jeden Punkt $x^* \in G$ ist die entsprechende Entwicklungsreihe $\sum_I a_I\cdot(x-x^*)^I$ die Taylor-Reihe von $F(x)$ um den Punkt x^*.
ii) Jede komplex-analytische Funktion $F(z)$ von Variablen $z = (z_1, \dots, z_n)$ mit $z_i = x_i + \mathbf{i}y_i$ ist reell-analytisch bzgl. den reellen Variablen $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$.

Für den Beweis brauchen wir das folgende

Hilfslemma. *Für jede $d, n \in \mathbb{N}$ gibt es genau $\binom{n+d-1}{n-1} = \frac{(d+1)(d+2)\ldots(d+n-1)}{(n-1)!}$ Multiindizes $I = (i_1, \ldots, , i_n)$ mit $i_a \in \mathbb{N}_0$ und $|I| := i_1 + \cdots + i_n = d$.*

Beweis. Zu jedem Multiindex I wie oben wird die Folge $m_0 := 0$, $m_1 := 1 + i_1$, $m_2 := 2 + i_1 + i_2, \ldots m_{n-1} := n - 1 + i_1 + \cdots + i_{n-1}$, $m_n = n + i_1 + \cdots + i_n$ zugeordnet. Dann $m_0 = 0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_{n-1} < m_n = n + d$ und $i_k = m_k - m_{k-1} - 1$. Insbesondere kann man den Multiindex $I = (i_1, \ldots, i_n)$ aus der zugehörigen Folge (m_i) "wiederherstellen". Also ist die Anzahl von Multiindizes $I = (i_1, \ldots, i_n)$ gleich die Anzahl von Folgen (m_i) mit $m_0 = 0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_{n-1} < m_n = n + d$. Dabei merkt man, dass die Werte $m_0 = 0$ und $m_n = n + d$ fest sind, so dass die restlichen Werte stets eine $(n-1)$-elementige Teilmenge der Menge $\{1, 2, \ldots, n + d - 1\}$ bilden. Die elementare Kombinatorik sagt uns nun die Formel $N = \binom{n+d-1}{n-1}$ für die Anzahl von solche Teilmengen. $\square$

Beweis des Lemmas. *i)* OEdA können wir überall $x^* = 0$ bzw. $z^* = 0$ setzen. Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|I|=k} a_I \, x^I$ eine Potenzreihe, die in einem $x^+ = (x_1^+, \ldots, x_n^+)$ mit $x_i^+ \neq 0$ (für jede Koordinate x_i) absolut konvergiert. Es sei $r := \min\{|x_1^+|, \ldots, |x_n^+|\}$. Dann ist die Wertemenge $\{|a_I| \, r^{|I|}\}$ beschränkt, $|a_I| \, r^{|I|} \leqslant M$ und damit $|a_I| \leqslant \frac{M}{|I|}$.

Nun sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Punkt mit $|x_i| \leqslant r' < r$. Dann können wir die Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|I|=k} a_I \, x^I$ in diesem Punkt wie folgt absolut abschätzen: $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|I|=k} |a_I \, x^I| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} \cdot M \cdot \left(\frac{r'}{r}\right)^k$ Da $\binom{n+k-1}{n-1} = (k+1) \cdot \ldots \cdot (k+n-1)$ ein Polynom von Grad $n-1$ bzgl. der Variablen k ist, $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\binom{n+k-1}{n-1} \cdot M \cdot \left(\frac{r'}{r}\right)^k} = \frac{r'}{r} < 1$. Das Wurzelkriterium sagt uns, dass die Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|I|=k} a_I \, x^I$ in jedem Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$

mit $\max\{|x_i| : i=1,\dots,n\} =: r' < r$ absolut konvergiert. Es sei $Q_R := [-R,R]\times\cdots\times[-R,R]$ der n-dimensionaler Würfel mit der Seite $2R$. Die obige Abschätzung zeigt die gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|I|=k} a_I\, x^I$ in jedem Würfel $Q_{r'}$ mit $r' < r$. Damit ist die Summe dieser Reihe eine stetige Funktion in jedem Würfel $Q_{r'}$ mit $r' < r$ und damit im Würfel Q_r.

Nun sei $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|I|=k} a_I\, \frac{\partial}{\partial x_j} x^I$ die gliedweise partielle Ableitung von der Reihe $f(x)$. Dann $a_I\, \frac{\partial}{\partial x_j} x^I = i_j{\cdot}a_I{\cdot}x^{I'}$ mit $I' = (i_1,\dots,i_j-1,\dots,i_n)$ und $i_j \leqslant |I|$. Damit für jeden Punkt $x = (x_1,\dots,x_n)$ mit $\max\{|x_i| : i=1,\dots,n\} =: r' < r$ gilt: $\sum_{|I|=k} \left|a_I\, \frac{\partial}{\partial x_j} x^I\right| \leqslant k{\cdot}\binom{n+k-1}{n-1}{\cdot}M{\cdot}\frac{(r')^{k-1}}{r^k}$. Wie oben benutzen wir den Wurzelkriterium, und der Limes $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k{\cdot}\binom{n+k-1}{n-1}{\cdot}M{\cdot}\frac{(r')^{k-1}}{r^k}} = \frac{r'}{r} < 1$ sagt uns, dass die abgeleitete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|I|=k} a_I\, \frac{\partial}{\partial x_j} x^I$in jedem Punkt $x = (x_1,\dots,x_n)$ mit $\max\{|x_i| : i=1,\dots,n\} =: r' < r$ absolut konvergiert. Darüber hinaus ist die Summe der abgeleiteten Reihe die Ableitung des Summe der Reihe $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$. Dies bedeutet, dass die Funktion $f(x)$ gegeben durch die Reihe $\sum_I a_I x^I$ ist glatt in dem Würfel Q_r mit $r > 0$ und dass jede Ableitung $\frac{\partial^{|J|} f(x)}{\partial x^J}$ in jedem Punkt $x \in Q_r$ als die Summe der abgeleitenden Reihe berechnet werden kann. Dies beweist, dass die Reihe $\sum_I a_I x^I$ die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ im Punkt $x^* = 0$ ist.

ii) Die Substitution $z_j = x_j + \mathbf{i} y_j$ macht aus jeder komplexen Potenzreihe $\sum_I a_I z^I$ eine Potenzreihe von *reellen* Variablen $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. Die Bemerkung, dass die absolute Konvergenz der komplexen Reihe $\sum_I a_I z^I$ zu der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_I a_I (x + \mathbf{i} y)^I$ ist, lässt uns die zweite Aussage des Lemmas schließen. □

4. Komplexe Differenzierbarkeit.

Erinnerung. Eine Funktion $f(x)$ einer reellen Variablen $x \in (a,b) =: I$ heißt **differenzierbar** in einem Punkt $x^* \in I$ falls es existiert der Limes $\lim_{x \to x^*} \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}$.
Die Umformulierung dieser Definition für Funktionen $F(x_1, \dots, x_n)$ mehrerer Variablen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ist das lokale Verhalten

$$F(\vec{x}) - F(\vec{x}^*) = dF(\vec{x}^*)(\vec{x} - \vec{x}^*) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^*\|)$$

im Umgebung des Punktes $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, wobei $dF(\vec{x}^*)(\vec{v})$ eine *lineare* Funktion/Abbildung bzgl. $\vec{v}$ ist. Dies bedeutet, dass der Zuwachs $F(\vec{x}) - F(\vec{x}^*)$ „in wesentlichen“ (d.h., bis auf Terme kleinerer Ordnung) linear ist. Der entsprechende lineare Term $dF(\vec{x}^*)$ (lineare Abbildung) heißt das **Differential** der Funktion $F(\vec{x})$ im Punkt $\vec{x}^*$.
In dieser Form bleibt die Definition unverändert für die Funktionen $F(\vec{x})$ mit Werten in $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$ und Banachräumen $(V, \|\cdot\|_V)$.
Wenn aber beide der Definitionsbereich $z \in G$ und der Wertebereich einer Funktion $f(x)$ komplex sind, kann man natürlicherweise fragen, ob das Differential auch eine *komplex*-lineare Abbildung ist.

Definition 1.9 (Komplexe Differenzierbarkeit.)

Eine Funktion $F(z) = F(z_1, \dots, z_n)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ mit Werten in $\mathbb{C}$ (oder in $\mathbb{C}^n$ oder in einem kplxen Banachraum V) ist ***komplex differenzierbar*** *in einem Punkt $z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$ falls*

$$F(z) - F(z^*) = dF(z^*)(z - z^*) + o(\|z - z^*\|)$$

mit einer ***komplex linearen*** *Abbildung $dF(z^*)(\vec{v})$. D.h., komplexe Differenzierbarkeit bedeutet die Differenzierbarkeit mit dem komplexen Differential $dF(z^*)$.*

Definition 1.10 (Holomorphe Funktionen.)

Eine komplexe Funktion $F(z) = F(z_1, \dots, z_n)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ heißt **holomorph** *falls sie C^1-glatt und kplx-differenzierbar in jedem Punkt $z \in G$ ist.*

Wir werden zeigen, dass holomorphe und kplx. analytische Funktionen dasselbe ist. Die **Funktionentheorie** kann man als die Theorie holomorpher Funktionen einer komplexen Veränderlichen definieren.

Zuerst bekommen wir

Lemma 1.9 (Komplexe Differenzierbarkeit in einer Veränderlichen)

Eine komplexe Funktion $F(z)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar in einem Punkt $z^* \in G$ gdw.

$$\exists \lim_{z \to z^*} \frac{f(z^*) - f(z)}{z^* - z}$$

und dann ist der Limes die komplexe Ableitung $f'(z^*)$ von $f(z)$ im Punkt z^*.
Eine C^1-glatte Funktion $F(z)$ in G ist holomorph gdw. der Limes oben in jedem Punkt $z^* \in G$ existiert.

Beweis. Folgt aus der Definition/Bedeutung des Symbols $o(\varphi(z))$. □

Als nächstes werden wir die Begriffe reeller und komplexer Differenzierbarkeit vergleichen. Dazu vergleichen wir die Begriffe reeller und komplexer linearer Abbildungen.

Nachtrag. Reell und komplex lineare Abbildungen

Es seien V und W komplexe VRäume, und $\Phi : V \to W$ eine Abbildung. Φ ist

- $\mathbb{R}$**-linear** $\Leftrightarrow \Phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Phi(v_1) + \alpha_2 \Phi(v_2)$ für alle α_1, α_2 **reell**;
- $\mathbb{C}$**-linear** $\Leftrightarrow \Phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Phi(v_1) + \alpha_2 \Phi(v_2)$ für alle α_1, α_2 **komplex**;
- **antilinear** $\Leftrightarrow \Phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \bar{\alpha}_1 \Phi(v_1) + \bar{\alpha}_2 \Phi(v_2)$ für alle α_1, α_2 **komplex**;

und für alle $v_1, v_2 \in V$.

Beispiele. Jede komplex lineare und jede antilineare Abbildung ist reell linear. Die Abbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto a{\cdot}z \in \mathbb{C}$ mit festen $a \in \mathbb{C}$ ist komplex linear, die Abbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ antilinear. Die Abbildungen $z \in \mathbb{C} \mapsto \Re(z) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \mapsto \Im(z) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sind reell linear, aber weder komplex noch anti-linear.

Lemma 1.10 (Zerlegung einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung in $\mathbb{C}$-linearen und antilinearen Teil.)

Jede reell lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat die Form $\Phi(z) = a{\cdot}z + b{\cdot}\bar{z}$ mit eindeutig definierten komplexen Konstanten a, b.

Beweis. Es seien (x, y) die reellen Koordinaten in $\mathbb{C}$ als Definitionsbereich und (u, v) die reellen Koordinaten in Wertebereich $\mathbb{C}$. Dann bedeutet die $\mathbb{R}$-Linearität die folgende Abhängigkeit der Koordinaten: $u = \alpha_1 x + \beta_1 y$ und $v = \alpha_2 x + \beta_2 y$. Nun setzen wir die Formeln $w = u + \mathbf{i} v$, $x = \Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $y = \Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathbf{i}}$ ein und bekommen $w = \frac{1}{2}\big((\alpha_1 + \beta_2) + \mathbf{i}{\cdot}(\alpha_2 - \beta_1)\big){\cdot}z + \frac{1}{2}\big((\alpha_1 - \beta_2) + \mathbf{i}{\cdot}(\alpha_2 + \beta_1)\big){\cdot}\bar{z}$. □

Die Abbildungen $z \mapsto a{\cdot}z$ und $z \mapsto b{\cdot}\bar{z}$ sind komplex und bzw. anti-linear. Wir möchten diese Zerlegung an das Differential einer komplexen Funktion anwenden.

Definition 1.11 (Operatoren $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.)

Es sei $f(z)$ eine Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ differenzierbar in einem Punkt $z^* \in G$. Die Operatoren der Differentiation nach z und bzw. nach $\bar{z}$ werden durch die Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z^*) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(z^*)}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial f(z^*)}{\partial y}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z^*) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(z^*)}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial f(z^*)}{\partial y}\right)$$

definiert, (Bitte Vorzeichen $+/-$ beachten!) *und* **komplexe/holomorphe** *und bzw.* **antikomplexe/antiholomorphe** *Ableitung genannt. Die alternative Notation ist $\partial_z f(z^*) = f'_z(z^*)$ und $\partial_{\bar{z}} f(z^*) = f'_{\bar{z}}(z^*)$.*

Lemma 1.11 (Differential und komplexe Ableitungen)

Es sei $f(z)$ eine Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ differenzierbar in einem Punkt $z^* \in G$. Dann

$$f(z) - f(z^*) = \frac{\partial f(z^*)}{\partial z}\cdot(z - z^*) + \frac{\partial f(z^*)}{\partial \bar{z}}\cdot(\overline{z - z^*}) + o(|z - z^*|).$$

Insbesondere sind die komplexe und antikomplexe Ableitungen die Koeffizienten der komplex-linearen und antilinearen Teile des Differentials df im Punkt z^*.

Beweis. Direkte Überprüfung der Gleichheit

$$f'_z(z^*)\cdot(z - z^*) + f'_{\bar{z}}(z^*)\cdot(\overline{z - z^*}) = f'_x(z^*)\cdot(x - x^*) + f'_y(z^*)\cdot(y - y^*). \qquad \square$$

Folgerung 1.12

Eine C^1-glatte Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist holomorph gdw. die **Holomorphiegleichung** $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ *in diesem Gebiet erfüllt.*

Satz 1.13 (Cauchy-Riemannsche Gleichungen)

Es sei $F(z)$ eine C^1-glatte Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit den Realteil $f(x,y) = \Re(F(x+\mathbf{i}y))$ und Imaginärteil $g(x,y) = \Im(F(x+\mathbf{i}y))$. Dann ist $F(z)$ holomorph in G gdw. die reellen Funktionen $f(x,y), g(x,y)$ das folgende System partieller Differentialgleichungen, genannt **Cauchy-Riemannsche Gleichungen**, *erfüllen*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

Beweis. Man überprüfe direkt die Formel $2 \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = (\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}) + \mathbf{i} \cdot (\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x})$. □

Kalkül der Differentialoperatoren $\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_{\bar{z}}$.

(Dz1) Die Operatoren $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ erfüllen die üblichen Regeln. Insbesondere

$$\frac{\partial}{\partial z} konst = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(f \pm g) = \frac{\partial}{\partial z} f \pm \frac{\partial}{\partial z} g, \quad \frac{\partial}{\partial z}(f \cdot g) = \frac{\partial}{\partial z} f \cdot g + f \cdot \frac{\partial}{\partial z} g, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{f}{g} = \frac{f'_z \cdot g - f \cdot g'_z}{g^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} konst = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \pm g) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \pm \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \cdot g) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \cdot g + f \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{f}{g} = \frac{f'_{\bar{z}} \cdot g - f \cdot g'_{\bar{z}}}{g^2}.$$

(Dz2) Die gemischte Ableitungen $f''_{xz}, f'''_{z\bar{z}y}$ usw. sind unabhängig von der Ableitungsreihenfolge falls die Funktion entsprechend glatt genug ist.

Proposition 1.14 (Kettenregel für komplexe Ableitungen.)

Es seien $f(z)$ und $g(w)$ zwei komplexe Funktionen einer komplexen Veränderlichen $z \in U \subset \mathbb{C}$ und bzw. $w \in V \subset \mathbb{C}$, die in z^* und bzw. in $w^* = f(z^*)$ differenzierbar sind, und so dass $f(U) \subset V$. Dann gilt für $h(z) := g \circ f(z)$ die folgende Kettenregel.

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \qquad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

wobei die Ableitungen von $h = g \circ f$, f und bzw. g in Punkten z^* und bzw. w^* berechnet werden.

Beweis. Es seien (u, v) der Real- und Imaginärteil der Variablen $w = u + \mathbf{i}v$, und $\varphi(u, v) := \Re(g(u + \mathbf{i}v))$ und $\psi(u, v) := \Im(g(u + \mathbf{i}v))$ der Real- und Imaginärteil der Funktion $g(w)$. Dann gelten für $\varphi \circ f(x, y)$ und $\psi \circ f(x, y)$ die übliche Kettenregel. Nun kombiniert man diese mit der Definition von (anti)komplexen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}$ usw. □

Faustregel für komplexe Ableitungen

Bein Differenzieren nach zueinander konjugierten Variablen z und $\bar{z}$ kann man so tun, als ob z und $\bar{z}$ zwei voneinander unabhängige Variable sind.

Warnung. Diese Faustregel folgt nicht aus der Analysis von Funktionen mehrerer *reeller* Variablen, sondern muss in jedem einzelnen Fall bewiesen/gezeigt werden. Meistens ist dies nicht schwer. Siehe auch die Diskussion in Kap.1, §4 von [Rem].

Erinnerung. Für eine C^2-glatte (reelle oder komplexe) Funktion $f(x,y)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist der **Laplace-Operator** definiert durch $\Delta f := \partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f$. Eine C^2-glatte (reelle oder komplexe) Funktion $f(x,y)$ in $G \subset \mathbb{C}$ ist **harmonisch** falls $\Delta f = 0$.

Satz 1.15 (Relation zwischen holomorphen und harmonischen Funktionen.)

(Har1) *Für eine C^2-glatte Funktion $f(x,y)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ gilt: $\Delta f = 4 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$.*

(Har2) *Es sei $f(x,y)$ harmonisch in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $h := \frac{\partial f}{\partial z}$ holomorph in G.*

(Har3) *Es sei $F(z)$ holomorph und C^2-glatt in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Dann sind die Funktionen $f(x,y) := \Re(F(x+\mathbf{i}y))$ und $g(x,y) := \Im(F(x+\mathbf{i}y))$ beide harmonisch in G.*

Bemerkungen. 1. Die Funktion $f(x,y)$ in (Har2) kann reell oder komplex sein, aber die Funktion $h := \frac{\partial f}{\partial z}$ wird in beiden Fällen komplexwertig.

2. Später werden wir zeigen, dass jede holomorphe Funktion analytisch und damit glatt ist. Deshalb ist die zweite Bedingung von C^2-Glattheit von $F(z)$ in (Har3) die Folgerung der Holomorphie.

Beweis. (Har1) $4 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = (\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \mathbf{i} \cdot (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x})$ $= \Delta f$. Man merke, dass wir die Gleichheit der gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ benutzt haben.

(Har2) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} h = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} f = \frac{1}{4} \Delta f = 0$, also ist $h(z)$ holomorph nach der Folgerung 1.12.

(Har3) $f(x,y) = \Re(F) = \frac{1}{2}(F+\bar{F})$ und damit $0 = 8\Delta f = 2\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\partial z} f = \frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\partial z}(F+\bar{F})$ $= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{F}}{\partial z} = 0 + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\overline{\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}} = 0.$ $\square$

5. Komplexe Integralrechnung.

In diesem Paragraph werden wir die wichtigste Begriffe und Tatsachen der Integrationstheorie kurz zusammenfassen. Die Referenzen sind die entsprechende Kapiteln in Büchern [Rem] und [Fi-Lie] und die vorige Vorlesung *Mathematik für Physiker III.*