

Mathematik IV für Studierende der Physik
Dr. Vsevolod Shevchishin

Probeklausur am 7.07.2010
Bearbeitungszeit: 60 min

Name, Vorname:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Schriftliche Hilfsmittel (Bücher, Skript, usw.) sind nicht zugelassen!

Punktezahl:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ

Note nach Klausurpunkten:

Themen und Fragen der Klausur

I. Funktionentheorie

. Referenzen. Ich benutze hauptsächlich das Buch "Funktionentheorie" von Reinhold Remmert zitiert als [Rem], und das Buch "Funktionentheorie" von Fischer und Lieb, zitiert als [Fi-Li].

1. Algebraische Eigenschaften des Körpers \mathbb{C} komplexer Zahlen. Was ist ein Körper (in algebraischen Sinne)? Wie definiert man den Körper \mathbb{C} ? Komplexe Konjugation. Algebraische Eigenschaften von \mathbb{C} . Algebraische Abgeschlossenheit von \mathbb{C} , der Hauptsatz der Algebra.

Darstellung komplexer Zahlen in Euklidischen und Polarkoordinaten $z = (x, y) = x + iy = r e^{i\varphi}$. Die Norm = der Betrag = der Modul $|z|$ und das Argument einer komplexen Zahl z . Die Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Kap.0 §1 von [Rem].

2. Topologische Eigenschaften von \mathbb{C} . Der Modul $|z|$ als die Abstandsfunktion und die Dreiecksungleichung. Kreisscheibe $\Delta(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen. Offene und abgeschlossene Teilmengen. Gebiete = zusammenhängende offene Mengen.

Kap.0 §§ 2,3,6 von [Rem].

3. Reihen und analytische Funktionen. Konvergenz einer Reihe komplexer Zahlen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Absolute Konvergenz. Reelle und komplexe Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Reihen von mehreren Veränderlichen. Definition einer komplex- bzw. reell-analytischen Funktion. Tatsache $f(z)$ ist komplex-analytisch $\Rightarrow f(x + iy)$ ist reell-analytisch (und komplex-wertig). C^∞ -Glattheit reell- und komplex-analytischer Funktionen.

Tatsache $f(z)$ ist komplex-analytisch $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ist die Taylor-Reihe von $f(z)$ in z_0 , und ähnlich im \mathbb{R} -analytischen Fall.

Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Cauchy-Hadamard-Formel und Quotientenkriterium.

Komplexe Fortsetzung einer reell-analytischer Funktion: $f(x)$ ist \mathbb{R} -analytisch in $I = [a, b] \Rightarrow$ existiert $\hat{f}(z)$ \mathbb{C} -analytisch s.d. $f(x) = \hat{f}(x + 0i)$, definiert in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $I \subset G$. Formel $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_0)^n$ für die Taylor-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ von $f(x)$ in x_0 .

Eindeutigkeit analytischer Fortsetzung einer analytischen Funktion.

Kap.0 §4 und Kap.4 von [Rem].

4. Komplexe Differenzierbarkeit und holomorphe Funktionen. Komplexe Differenzierbarkeit $f(z)$ in z_0 als Darstellung $f(z) = f(z_0) + a \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$ und als Existenz des Limes $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Komplexe Ableitung. Holomorphe Funktionen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Operatoren $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Cauchy-Riemann Gleichungen auf $u(x, y) + iv(x, y)$. Äquivalenz der CR-Gleichungen und der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Tatsache *Jede komplex-analytische Funktion ist holomorph.*

Kap.1 §4 und Kap.4 von [Rem].

5. Komplexe Integration. Cauchy-Integralformel. Differentialformen in Gebieten von \mathbb{C} . Reelle und komplexe Darstellungen einer 1-Form $\alpha = f_1 dx + f_2 dy = g_1 dz + g_2 d\bar{z}$ und einer 2-Form $\omega = f dx \wedge dy = f \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$. Das Differential df einer Funktion und $d\alpha$ einer 1-Form in reellen und komplexen Koordinaten. (Stückweise) stetig diff.bare Wege/Kurven in Gebieten von \mathbb{C} . Eingebettete und geschlossene Wege/Kurven. Rand ∂G eines C^1 -Gebietes als Vereinigung von Kurven. Der Fall unbeschränkter Gebiete. Integration $\int_\gamma \alpha$ und $\int_G \omega$ einer 1- bzw. 2-Form. Voraussetzungen (Hinreichende Bedingungen) für die Existenz der Integrale. Der Satz von Stokes $\int_{\partial G} \alpha = \int_G d\alpha$.

Versionen der Holomorphiebedingung: $f(z) \in \mathcal{O}(G) \Leftrightarrow \bar{\partial}f = 0 \Leftrightarrow d(f(z)dz) = 0$. (Un)Abhängigkeit eines Integrals $\int_\gamma f(z)dz$ ($f(z)$ holom.) von Wegen γ von z_0 nach z_1 .

Kap.6 von [Rem].

6. Cauchy-Integralformel. Cauchy-Green Formel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \partial G} \frac{f(z)dz}{z - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in G} \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - z_0}$$

und ihre Voraussetzungen ($G \subset \mathbb{C}$ ist beschränkt und C^1 -glatt, $f(z)$ ist C^1 -glatt in G bis auf Rand, $z_0 \in G$.) Cauchy-Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \partial G} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

und ihre Voraussetzungen ($G \subset \mathbb{C}$ ist beschränkt und C^1 -glatt, $f(z)$ ist holomorph in G und stetig bis auf Rand, $z_0 \in G$.)

Cauchy-Integralformel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

für die Taylor-Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Voraussetzungen auf γ .

Folgerung: Jede holomorphe Funktion ist komplex-analytisch.

Kap.7 von [Rem].

7. Isolierte Singularitäten und meromorphe Funktionen Isol. Singularität einer holomorphen Funktion. z_0 ist eine isolierte Singularität in z_0 von $f(z) \Leftrightarrow f(z)$ ist holomorph in $\Delta(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. In einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ kann es nur endlich viele isolierte Singularitäten geben. Singularitätstypen: hebbbar, Pol(stelle), wesentlich.

Riemannsches Hebbbarkeitssatz: $f(z) \in \mathcal{O}(\Delta(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$ und $f(z) \in L^2(\Delta(z_0, \varepsilon))$ (oder $f(z) \in L^\infty(\Delta(z_0, \varepsilon))$, d.h., f ist beschränkt) $\implies z_0$ ist hebbbar und $f(z)$ holomorph fortsetzbar in z_0 .

Satz von Weierstraß-Casorati: z_0 ist wesentlich $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{C} \exists$ Folge $z_\nu \rightarrow z_0$ s.d. $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f(z_\nu) = a$.

Limes-Kriterium: z_0 ist hebbbar $\Leftrightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$,

z_0 ist eine Polstelle $\Leftrightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$,

z_0 ist wesentlich $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ nicht existiert.

Definition einer meromorphen Funktion. Ordnung eine Null- bzw. Polstelle.

Kap.10 von [Rem].

8. Laurent-Reihen. Kreisringe $A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Laurent-Reihe einer Funktion $f(z) \in \mathcal{O}(A_{r,R}(z_0))$ und Cauchy-Integralformel $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$. Relation zwischen Laurent- und Fourierreihen.

Kap.12 von [Rem].

9. Residuen und der Residuensatz. Definition des Residuums $\text{Res}(f(z), z_0)$. Tatsache $f(z)$ ist holomorph in $z_0 \Rightarrow \text{Res}(f(z), z_0) = 0$. Residuumsformel $\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_j)$ und ihre Voraussetzungen. Residuumsformel $\int_{\partial G} f(z) \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 2\pi i \sum f(z_j) NO(g, z_j) - 2\pi i \sum f(z_k) PO(g, z_k)$ und ihre Voraussetzungen. Berechnung von Integralen $\int_{t=0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$, $\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ und ähnliche mit der Hilfe des Residuensatzes.

Kap.13 und 14 von [Rem].

10. Umlaufzahl. Definition der Umlaufzahl $n(\gamma, z_0)$. Formel $n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$ und ihre Voraussetzungen. Einfach zusammenhängende und sternförmige Gebiete. Tatsache: *Jedes sterförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend.* Tatsache G ist einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jede geschlossene Kurve $\gamma \subset G$. Existenz von Stammfunktionen holomorpher Funktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten, Formel $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$.

Kap.V von [Fi-Li] und eventuell Kap.9 §5 von [Rem].

I. Funktionalanalysis.

Referenz. "Funktionalanalysis" von Dirk Werner

1. Metrische und normierte Räume. Definition einer Metrik7Abstandsfunktion und eines metrische Raumes (X, d_X) . Konvergenz einer Folge. Stetige Funktionen und stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Kompakte (Teil)mengen.

Vollständigkeit und Vervollständigung eines metrischen Raumes.

Anhang B von [Wer].

2. Normierte und Banachräume. Definition einer Norm auf einem Vektorraum. Tatsache $\|v - w\|$ ist eine Abstandsfunktion. Normierte und Banach-Räume. Beispiele $L^p(X, \mu)$, $C^k([a, b])$, ℓ^p , ℓ^∞ , \mathbf{c}_0 . Äquivalenz zweier Normen: $c \cdot \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq C \cdot \|v\|_2$.

Kap.I von [Wer].

3. Skalarprodukt und Hilberträume. Definition eines Hermiteschen Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Tatsache $(\langle v, v \rangle)^{1/2}$ ist eine Norm. Prä- und Hilberträume. Beispiele $L^2(X, \mu)$, $L^2(\mathbb{R})$, ℓ^2 .

Orthonormierungsverfahren. ON-Systeme, vollständige ON-Systeme und Hilbert-Basen. Separable Hilbert- (bzw. Banach-)Räume. Plancherel-Gleichheit $\langle v, w \rangle = \sum_j \bar{a}_j b_j$ und $\|v\|^2 = \sum_j |a_j|^2$ für $v = \sum_j a_j e_j$ und $w = \sum_j b_j e_j$. Isomorphismus $H \cong \ell^2$ für einen unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum H .

Adjungierte selbstadjungierte und normale Operatoren. Beispiele.

Kap.V von [Wer].

4. Beschränkte Operatoren. Definition eines beschränkten Operators $A : V \rightarrow W$. Die Operatornorm $\|A\|_{\text{op}}$. Äquivalenz "beschränkt" \Leftrightarrow "stetig". Der Raum $\mathcal{L}(V, W)$ von beschränkten Operatoren. Tatsache W ist vollständig (ein Banachraum) $\Rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ ist es auch.

Kompakte Operatoren. Tatsache *Jeder kompakte Operator ist beschränkt.* Tatsache $\text{Id}_V : V \rightarrow V$ ist kompakt $\Leftrightarrow V$ ist endlich-dimensional.

Kap.II von [Wer].

5. Beschränkte Funktionale und der Dualraum. Definition $V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{C})$. Vollständigkeit von V^* . Die Dualnorm. Tatsachen $(L^p(X, \mu))^* = L^q(X, \mu)$ und $(\|\cdot\|_{L^p(X, \mu)})^* = \|\cdot\|_{L^q(X, \mu)}$ für $1 \leq p < +\infty$ und $q := \frac{p}{p-1}$. Einbettung $V \hookrightarrow V^{**}$. Reflexive Räume. Der abstrakter Riesz-Satz " $H^* = H$ " für einen Hilbertraum H .

Kap.II von [Wer].

6. Konvergenztypen. Norm-, starke, schwache, und *-schwache Konvergenz von Operatoren. Norm-, schwache, und *-schwache Konvergenz von Funktionalen.

Kap.III.3 von [Wer].

7. Hauptsätze der Banach-Theorie.

Der Hahn-Banach-Satz über Fortsetzung der Funktionale. Kap.III von [Wer].

Das Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit. Mengen 1. und 2. Kategorie und der Satz von Baire. Tatsache *jeder vollständige metrische Raum ist eine Menge 2. Kategorie in sich und kann nicht als abzählbare Vereinigung nirgendwo dichter Teilmengen dargestellt werden.* Der Satz von Banach-Steinhaus über die gleichmässige Beschränktheit einer stark beschränkten Familie $\mathcal{T} = \{T_i\}$ von Operatoren von V nach W .

Der Satz von der offenen Abbildung: *Der surjektive Operator $T : V \rightarrow W$ zwischen Banachräumen ist offen.* Der Satz von der inversen Abbildung: *Für einen bijektiven Operator $T : V \rightarrow W$ zwischen Banachräumen ist die Abbildung T^{-1} ein beschränkter Operator.* Der Satz von der abgeschlossenen Graphen.

Kap.IV von [Wer].

Spektraltheorie.

8. Spektrum und Resolvente. Definition des Spektrums und der Resolventenmenge eines beschränkten Operators. Eigen- und Spektralwerte. Die Resolventenfunktion $R_T(\lambda)$. Abgeschlossenheit und Beschränktheit des Spektrums. Tatsache $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ für selbstadjungierte Operatoren.

Kap.V. §1 von [Wer].

9. Spektraltheorie für kompakte Operatoren. Der Satz von Riesz-Schauder und Struktur des Spektrums eines kompakten Operators: Jedes $\lambda \neq 0 \in \sigma(T)$ ist ein Eigenwert, $\dim(\ker(\lambda - T)) < \infty$, für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es höchstens endlich viele $\lambda_j \in \sigma(T)$ mit $|\lambda_j| \geq \varepsilon$.

Tatsache $\text{Id}_V : V \rightarrow V$ ist kompakt $\Leftrightarrow V$ ist endlich-dimensional.

Spektrale Darstellung eines kompakten selbstadjungierten oder normalen Operators $T \in \mathcal{L}(H)$: Zerlegung $H = H_0 \oplus H_1$ mit $H_0 = \ker(T)$, $H_1 = (H_0)^\perp$, ON-Basis $\{e_i\}$ von H_1 aus E-Vektoren von T , die Formel $T : v = v_0 + \sum a_j e_j \mapsto \sum \lambda_j a_j e_j$.

Kap.V §§2–3 von [Wer].

10. Spektraltheorie für beschränkte selbstadjungierte Operatoren. Tatsache $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Der Approximationsatz von Weierstraß-Stone (Satz I.2.10 von [Wer] für beliebige kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}$) und Kalkül von stetigen Funktionen auf dem Spektrum $\sigma(T)$: Zuordnung $f(x) \in C^0(\sigma(T)) \mapsto f(T) = \Phi(f)$.

Die Algebra $\Sigma_B(K)$ von Borelsche Teilmengen von $K \subset \mathbb{R}$, Borelsche Funktionen und Kalkül von Borelschen Funktionen auf dem Spektrum $\sigma(T)$: Zuordnung $f(x) \in \mathcal{B}(\sigma(T)) \mapsto f(T) = \widehat{\Phi}(f)$. Schwache Stetigkeit $f_\nu(x) \rightarrow f(x)$ punktweise $\Rightarrow f_\nu(T) \rightarrow f(T)$ (schwach).

Spektralmaß $E : A \in \Sigma_B(\sigma(T)) \mapsto E_A \in \mathcal{L}(H)$ mit $E_A = \widehat{\Phi}(\chi_A)$, Tatsache $E_A : H \rightarrow H$ ist eine orthogonale Projektion. Definition des Integrals $\int_{\lambda \in \sigma(T)} f(\lambda) dE$ für $f(\lambda) \in \mathcal{B}(\sigma(T))$.

Tatsache $T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE$.

Kap.VI §1 von [Wer].

Relevante Aufgaben aus den Übungen.

Blatt 1. A1, A2, A3, A4.

Blatt 2. A1, A3, A4.

Blatt 3. A1.

Blatt 4. A1, A2, A3.

Blatt 5. A1, A3.

Blatt 6. A1, A2, A3, A4.

Blatt 7. A2, A3, A4.

Blatt 8. A1, A2, A3, A4.

Blatt 9. A1, A2, A3, A4.

Blatt 10. A1, A2, A3, A4.

Blatt 11. A1, A2.