Mathematik IV für Studierende der Physik

Dr. Vsevolod Shevchishin

Probeklausur am 7.07.2010

Bearbeitungszeit: 60 min

Name, Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Schriftliche Hilfsmittel (Bücher, Skript, usw.) sind nicht zugelassen!

Punktezahl:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ

Note nach Klausurpunkten:

Name, Vorname:.......................... **Matrikel-Nr.:**..........................

Aufgabe 1. (30 Punkte.)

Berechnen Sie den Konvergenzradius folgender Reihen:

(1) $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} z^k$.

(2) $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^{2k}$.

(3) $\mathsf{cos}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} z^{2k}$.

(Hinweis: Benutzen Sie die Stierling-Formel $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(\frac{1}{n}))$ für $n \longrightarrow +\infty$)

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................

Aufgabe 2. (30 Punkte.)

Bestimmen Sie das Integral $\int_\gamma \frac{\cos z}{(z^2+1)} dz$, wobei γ die Ellipse gegeben durch die Gleichung $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ist.

Name, Vorname:.......................... **Matrikel-Nr.:**..........................

Aufgabe 3. (40 Punkte.)

A3i Geben Sie die Definitionen einer holomorphen und eine komplex-analutischen Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ein. Welche Relationen zwischen holomorphen und komplex-analutischen Funktionen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ bestehen?

A3ii Schreiben Sie die Cauchy-Integralformel für eine holomorphe Funktion $f(z)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Welche Voraussetzungen auf G und $f(z)$ braucht man?

A3iii Welche Relationen zwischen harmonischen und holomorphen Funktionen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ bestehen?

A3iv Was ist eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion? Welche Typen von isolierten Singularitäten unterscheidet man?

Name, Vorname:.............................**Matrikel-Nr.:**.............................

Aufgabe 4. (30 Punkte.)

Beweisen Sie den Isomorphismus $L^2([0,1]) \cong \ell^2$.

Name, Vorname:.......................... **Matrikel-Nr.:**..........................

Aufgabe 5. (40 Punkte.)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (+, ×, oder **J** für richtig, − oder **N** für falsch.)

Jede bijektive stetige lineare Abbildung zwischen Banachräumen ist invertierbar.	
Jeder kompakter Operator zwischen Banachräumen ist stetig.	
In ℓ^2 hat jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge.	
Ein Hilbertraum ist endlich-dimensionsal gdw. jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge hat.	

Name, Vorname:.............................**Matrikel-Nr.:**.............................

Aufgabe 6. (30 Punkte.)

Berechnen Sie das Spektrum des Operators $T : \ell^2 \to \ell^2$ mit

$$T : (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto ((1-1)a_1, (1-\tfrac{1}{2})a_2, (1-\tfrac{1}{3})a_3, \ldots, (1-\tfrac{1}{n})a_n, \ldots).$$

Zeigen Sie, dass T nicht kompakt ist.

Schmierpapier