

Klausur zur Mathematik IV für Studierende der Physik

17.07.08

Name, Vorname:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Übungshelfer:

Gruppennummer:

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen!

Keine Angabe des Übungshelfers oder der Gruppen-Nummer bedeutet, dass Sie auf Bonuspunkte verzichten wollen!

Bei den Aufgaben 1-5 sind schriftliche Zwischenrechnungen und Begründungen mit abzugeben!

Aufgabe 1: (35 Punkte)

Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 4x^2 + 4} dx.$$

Aufgabe 2: (35 Punkte)

Bestimmen Sie die Laurentreihe von $f(z) = \frac{1}{z(z-i-1)^2}$, $z \neq 0, i+1$, für $|z| > \sqrt{2}$ mit Entwicklungspunkt 0.

Aufgabe 3: (35 Punkte)

Sei $f(z) = \frac{z \sin z + 2 \cos z - 2}{z^2(z-\pi)}$, $z \neq 0, \pi$. Welche Singularitäten liegen in $z_1 = 0$ bzw. $z_2 = \pi$ vor? Bestimmen Sie im Falle einer hebbaren Singularität den Grenzwert und in den anderen Fällen das Residuum.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Gegeben sei der Operator $F: l_2(\mathbb{C}) \rightarrow l_2(\mathbb{C})$, $F(e(n)) = \frac{1}{n}(e(n) + e(n+1))$. Bestimmen Sie F^* .

Aufgabe 5: (25 Punkte)

Gegeben sei der Operator $f: l_2(\mathbb{C}) \rightarrow l_2(\mathbb{C})$, $F(e(n)) = \cos ne(2n)$. Ist F ein normaler Operator?

Aufgabe 6: (15 Punkte)

Wie lautet der Residuensatz für allgemeine Gebiete?

Aufgabe 7: (10 Punkte)

Ist folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, die in einem Punkt $p \in U$ komplex differenzierbar ist, ist in einer Umgebung von p in eine Potenzreihe entwickelbar.

Aufgabe 8: (10 Punkte)

Geben Sie die Definition eines orthogonalen Projektionsoperators P auf einem Hilbertraum H .

Aufgabe 9: (10 Punkte)

Ist folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei V ein Banachraum und $A \in L(V)$ ein unitärer Operator auf V . Dann gilt immer $\text{Spec}(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.

Bitte heften Sie diesen Zettel mit Ihren Lösungsblättern zusammen.

Abgabe: 90 Minuten nach Beginn

Wiederholungsklausur zur Mathematik IV für Studierende der Physik

9.10.08

Name, Vorname:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Übungshelfer:

Gruppennummer:

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen!

Keine Angabe des Übungshelfers oder der Gruppen-Nummer bedeutet, dass Sie auf Bonuspunkte verzichten wollen!

Bei den Aufgaben 1-5 sind schriftliche Zwischenrechnungen und Begründungen mit abzugeben!

Aufgabe 1: (35 Punkte)

Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x + 1} dx.$$

Aufgabe 2: (35 Punkte)

Sei $f(z) = \frac{\cos z - \cosh z}{(e^z - 1)(z + 1)}$, $z \neq 0, -1$. Welche Singularitäten liegen in $z_1 = 0$ bzw. $z_2 = -1$ vor? Bestimmen Sie im Falle einer hebbaren Singularität den Grenzwert und in den anderen Fällen das Residuum.

Aufgabe 3: (35 Punkte)

Betrachten Sie den Operator $F : l_2(\mathbb{C}) \rightarrow l_2(\mathbb{C})$, $F(e(n)) = e^{-n}e(2n + 1)$. Berechnen Sie das Spektrum von FF^* .

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Bestimmen Sie den Kreisring, in dem die folgende Laurentreihe konvergiert:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi^{-|n|} (z - \sqrt{2} + ei)^n.$$

Aufgabe 5: (25 Punkte)

Bestimmen Sie die Punkte $p \in \mathbb{C}$, in denen die Funktion $f(z) = e^{(Imz)(Rez)}$ komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 6: (15 Punkte)

Wie lauten die Cauchyschen Integralformeln für allgemeine Gebiete?

Aufgabe 7: (10 Punkte)

Ist folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ und sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann besitzt die Gleichung $f(z) = a$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine Lösung mit $|z| < \varepsilon$.

Aufgabe 8: (10 Punkte)

Geben Sie die Definition des Spektrums eines beschränkten Operators A auf einem Hilbertraum.

Aufgabe 9: (10 Punkte)

Ist folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei V ein Banachraum und $A \in K(V)$ ein kompakter Operator auf V . Dann gilt immer $0 \in S_A$.

Bitte heften Sie diesen Zettel mit Ihren Lösungsblättern zusammen.

Abgabe: 90 Minuten nach Beginn