Klausur

Mathematik IV für Studierende der Physik

Dr. Vsevolod Shevchishin

30.09.2010

Bearbeitungszeit: 90 min

Name, Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Schriftliche Hilfsmittel (Bücher, Skript, usw.) sind nicht zugelassen!

Punktezahl:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ

Note nach Klausurpunkten:

Name, Vorname:. . . . .**Matrikel-Nr.:**. . . . .

Aufgabe 1. (30 Punkte.)

Berechnen Sie die Taylor-Reihe und den entsprechenden Konvergenzradius folgender Funktionen:

(i) $f(z) = \frac{z-\mathsf{sin}(z)}{z^2}$ in dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

(ii) $g(z) = \mathsf{arctan}(z)$ in dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

(Hinweis: Benutzen Sie die Relation $\frac{d}{dz}\mathsf{arctan}(z) = \frac{1}{1+z^2}$.)

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................

Aufgabe 2. (25 Punkte.)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

(i) $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+1}$;

(ii) $\int_{t=0}^{2\pi} \frac{dt}{1+\sin^2 t}$.

Name, Vorname:.........................**Matrikel-Nr.:**...........................

Aufgabe 3. (25 Punkte.)

(i) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (+, ×, oder **J** für richtig, − oder **N** für falsch.)

Jeder holomorphe Funktion ist reell analytisch.	
Jeder reell analytische Funktion ist holomorph.	
Imaginärteil einer komplex analytischen Funktion ist harmonisch.	

(ii) Wann ist ein Quotient zweier holomorphen Funktionen eine meromorphe Funktion?

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................

Aufgabe 4. (20 Punkte.)

Berechnen Sie die Laurent-Reihen und deren inneren und äußeren Konvergenzradien der Funktion $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+1)^2}$ in Gebieten $U_0 := \{z : |z| < 1\}$ und $U_1 := \{z : |z| > 1\}$ mit dem Entwicklungspunkt jeweils $z_0 = 0$.

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................

Aufgabe 5. (30 Punkte.)

(i) Geben Sie die Definitionen eines beschränkten und eines kompakten Operators zwischen Banachräumen.

(ii) Definieren Sie das Spektrum und die Resolventenfunktion eines beschränkten Operators $T : V \to V$.

(iii) Geben Sie die Definition eines selbstadjungierten Operators.

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................

Aufgabe 6. (40 Punkte.)

Es sei H der Raum holomorpher Funktionen $f(z)$ in der Kreisscheibe $\Delta := \{z : |z| < 1\}$ versehen mit der $L^2(\Delta)$-Norm $\|f(z)\|^2 := \int_\Delta |f(z)|^2 \, dxdy$.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge der Monome $\{1, z, z^2, z^3, \ldots\}$ ein vollständigen orthogonales System ist, und finden Sie die Normierungen a_n, so dass die Funktionen $f_n(z) := a_n z^n$ eine Hilbertbasis bilden.

(ii) Es sei $T : H \to H$ der Integrationsoperator gegeben durch $T(f(z)) := \int f(z)dz$ und $T(f(z))|_{z=0} = 0$. Finden Sie das Spektrum von T und zeigen Sie, dass T kompakt ist. (Hinweis: Berechnen Sie die Wirkung von T auf die Basisfunktionen $f_n(z)$.)

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................

Aufgabe 7. (30 Punkte.)

(i) Formulieren Sie die Hölder-Ungleichung.

(ii) Beweisen Sie mit Hilfe dieser Ungleichung, dass der Dualraum zu $L^p([0,1])$ mit $1 < p < \infty$ der Raum $L^q([0,1])$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

Schmierpapier

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................

Schmierpapier

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................