Klausur

Mathematik IV für Studierende der Physik

Dr. Vsevolod Shevchishin

22.07.2010

Bearbeitungszeit: 90 min

Name, Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Schriftliche Hilfsmittel (Bücher, Skript, usw.) sind nicht zugelassen!

Punktezahl:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

Note nach Klausurpunkten:

Name, Vorname:.......................... **Matrikel-Nr.:**...........................

Aufgabe 1. (30 Punkte.)

Berechnen Sie die Taylor-Reihen und den entsprechenden Konvergenzradius folgender Funktionen:

(1) $f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2}$ in dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

(2) $g(z) = \log(z)$ in dem Entwicklungspunkt $z_0 = 1$.

(Hinweis: Benutzen Sie die Relation $\frac{d}{dz}\log(z) = z^{-1}$.)

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................

Aufgabe 2. (25 Punkte.)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(1) $\int_\gamma \frac{dz}{\tan(z)\cdot(z^2+1)}$, wobei γ die Kreislinie gegeben durch die Gleichung $|z| = 2$ ist.

(2) $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

Name, Vorname:.......................... **Matrikel-Nr.:**..........................

Aufgabe 3. (25 Punkte.)

A3i Geben Sie die Definition der komplexen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

A3ii Geben Sie die Definition einer isolierten Singularität z_0 einer holomorphen Funktion $f(z)$ und des Residuums von $f(z)$ im Punkt z_0. Schreiben Sie die Cauchy-Integralformel für $\mathsf{Res}_{z_0}(f)$.

A3iii Formulieren Sie den Residuensatz für ein Integral der Form $\int_{\partial G} f(z)dz$. Welche Voraussetzungen auf G und $f(z)$ braucht man?

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**...........................

Aufgabe 4. (20 Punkte.)

Berechnen Sie die Laurent-Reihe und deren inneren und äußeren Konvergenzradius der Funktion $f(z) = \mathsf{sin}(z) + \frac{1}{z}$ in dem Entwicklungspunkt $z_0 = 1$.

Name, Vorname:........................... **Matrikel-Nr.:**...........................

Aufgabe 5. (30 Punkte.)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (+, ×, oder **J** für richtig, − oder **N** für falsch.)

Jeder injektive lineare Operator zwischen Banachräumen ist offen.	
Jeder endlich-dimensionaler Operator zwischen Banachräumen ist kompakt.	
Der Graph eines beschränken Operators zwischen Banachräumen ist abgeschlossen.	
Ein endlich-dimensionaler Hilbertraum ist separabel gdw. er ein abzählbares orthonormiertes System zulässt.	

Name, Vorname:...........................**Matrikel-Nr.:**...........................

Aufgabe 6. (30 Punkte.)

Es sei $H = L^2([0,1])$ und $\mathcal{P} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ die Menge der Monome. Finden Sie die ersten 3 Polynome des orthonormierten Systems $\mathcal{B} = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots\}$, das bei dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $\mathcal{P}$ entsteht.

Name, Vorname:........................... **Matrikel-Nr.:**...........................

Aufgabe 7. (40 Punkte.)

A7i Geben Sie die Definition des Spektrums und der Resolventenmenge eines Operators $T : V \to V$.

A7ii Berechnen Sie das Spektrum des Operators $T : \ell^2 \to \ell^2$ mit

$$T : (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (a_1, \tfrac{a_2}{2}, \tfrac{a_3}{3}, \ldots, \tfrac{a_n}{n}, \ldots).$$

A7iii Zeigen Sie, dass T kompakt und $1 - T$ nicht kompakt ist.

Schmierpapier

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................

Schmierpapier

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................