Mathematik für Physiker IV

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 9

Abgabetermin: 23. Juni (Mi.) in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte). Das *fast-periodische Skalarprodukt* $\langle f(x), g(x)\rangle_{FP}$ zweier Funktionen $f(x), g(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\lim_{T\to+\infty} \tfrac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \bar{f}(x) g(x)\, dx$$

falls der Limes existiert. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\cos(\alpha x), \cos(\beta x), \sin(\alpha x), \sin(\beta x)$ mit $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$ zueinander orthogonal bzgl. des fast-periodischen Skalarprodukts sind und berechnen Sie die fast-periodische Norm $\|f(x)\|_{L^2_{FP}(\mathbb{R})} := (\langle f(x), f(x)\rangle_{FP})^{1/2}$ dieser Funktionen.

Aufgabe 2. (4 Punkte). Es sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum.

(a) Zeigen Sie die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

für alle $v, w \in H$.

(b) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt aus der Norm mit der Formel

$$4\langle v, w\rangle = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + \mathrm{i}\,\|v+\mathrm{i}w\|^2 - \mathrm{i}\,\|v-\mathrm{i}w\|^2$$

berechnet werden kann.

Aufgabe 3. (4 Punkte). Es sei $T : \ell^2 \to \ell^2$ der Operator gegeben durch

$$T : (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \mapsto (0, \tfrac{a_1}{1}, \tfrac{a_2}{2}, \tfrac{a_3}{3}, \dots)$$

(a) Zeigen Sie die Abschätzung $\|T^k\|_{\mathsf{op}} \leqslant \frac{1}{k!}$.

(b) Berechnen Sie das Spektrum $\sigma(T)$ und die Eigenwerten von T.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Resolventenreihe $R_T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}$ für alle $\lambda \neq 0$ konvergiert.)

Aufgabe 4. (4 Punkte). Es seien S, T lineare beschränkte Operatoren in einem Banachraum V. Zeigen Sie die folgenden Funktionalgleichungen:

(a) $R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\mu - \lambda) R_T(\lambda) \circ R_T(\mu)$ für λ, μ aus der Resolventenmenge $\mathbb{C}\backslash\sigma(T)$.

(b) $R_S(\lambda) - R_T(\lambda) = R_S(\lambda) \circ (S - T) \circ T_T(\lambda)$ für λ aus der gemeinsamen Resolventenmenge $\mathbb{C}\backslash(\sigma(S) \cup \sigma(T))$.