Mathematik für Physiker IV

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 8

Abgabetermin: 16. Juni (Mi.) in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte). Es sei a_n eine reelle Folge mit $a_n \geqslant 0$, so dass die Reihe $\sum_n a_n$ divergiert. Zeigen Sie, dass es eine reelle Folge c_n mit $c_n \geqslant 0$ existiert, so die Reihe $\sum_n c_n a_n$ divergiert und $\mathsf{lim}_{n\to\infty} c_n = 0$.

(Hinweis: Suchen Sie die Folge c_n in der Form $c_n = \frac{1}{k}$ für $\nu_{k-1} < n \leqslant \nu_k$ und wählen Sie ν_k unter der Bedingung $\sum_{n=\nu_{k-1}+1}^{\nu_k} c_n a_n \geqslant 1$.)

Aufgabe 2. (4 Punkte). Der Raum $\{c = (c_n) : \mathsf{lim}_{n\to 0} c_n\}$ komplexer Nullfolgen wird mit $\boldsymbol{c}_0$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass jedes beschränkte Funktional $\varphi : \boldsymbol{c}_0 \to \mathbb{C}$ die Form $\varphi(c) = \sum_n a_n c_n$ für eine geeignete Folge $a = (a_n)$ aus ℓ^1 und damit $(\boldsymbol{c}_0)^* = \ell^1$.

(Hinweise: Die entsprechende Folge $a = (a_n)$ könnte aus der Gleichung $a_n = \varphi(\mathbf{e}_n)$ gefunden werden, wobei $\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1_n, 0, \ldots)$ die Folge mit 1 auf der n-ten Stelle und 0 auf den restlichen Stellen ist. Benutzen Sie die Aufgabe 1, um Konvergenz der Reihe $\sum_n |a_n| = \|(a_n)\|_{\ell^1}$ zu Zeigen.)

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $\boldsymbol{c}_0$ nicht reflexiv ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte). Es sei H ein Hilbertraum und $v_n \in H$ eine Folge. Zeigen Sie, dass v_n zu einem $w \in H$ konvergiert, genau dann wenn v_n schwach zu w konvergiert und $\mathsf{lim}_{n\to\infty} \|v_n\| = \|w\|$.

(Hinweis: Betrachten Sie die Folge $\|v_n - w\|^2 = \langle v_n, v_n \rangle - \langle v_n, w \rangle - \langle w, v_n \rangle + \langle w, w \rangle$ und untersuchen Sie einzelne Terme auf Konvergenz.)

Aufgabe 4. (4 Punkte). Es sei d eine Metrik auf dem Körper $\mathbb{Q}$ rationaler Zahlen, die die übliche Konvergenz induziert, d.h., $d(q_n, p) \to 0$ genau dann wenn $|q_n - p| \to 0$ für jedes $p \in \mathbb{Q}$ und jede Folge $q_n \in \mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ eine Menge der 1. Kategorie in sich ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ nicht vollständig bzgl. d ist.