Mathematik für Physiker IV

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 7

Abgabetermin: 9. Juni (Mi.) in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte). Es sei V der Raum $\mathbb{C}^2$ mit der Norm $\|v\| := \|v\|_{\ell^3} := (|v_1|^3+|v_2|^3)^{1/3}$ und $A : V \to V$ ein Opertor mit der Matrix $M_A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie die Operatornorm $\|A\|_{\mathsf{op}}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte). Es sei $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ ein linearer Operator mit der Matrix $M_A = (a_{ij}) \in \mathsf{Mat}(3, \mathbb{C})$. Berechnen Sie die Matrix des adjungierten Operator $A^* : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$.
(Hinweise: A^* ist *nicht* Hermitesch konjugiert zu A. Beachten Sie, dass auch wenn der duale Raum $(\mathbb{C}^3)^*$ derselbe Raum $\mathbb{C}^3$ ist, ist die entstehende Paarung $w(v) = \langle w, v\rangle := \sum_{i=1}^3 w_i v_i$ für $w = (w_1, w_2, w_2)$ und $v = (v_1, v_2, v_3)$ kein Hermitesches Skalarprodukt.)

Aufgabe 3. (4 Punkte). Es sei $f_n(x)$ eine Folge von Treppenfunktionen

$$f_n(x) := c_n\chi_{[-1/0,1/n]} = \begin{cases} c_n & x \in [-1/n, 1/n] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner sei $p \in [1, \infty)$ gegeben.

(a) Finden Sie die rellen positiven Werten von Koeffizienten c_n, so dass $\|f_n(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $f_n(x)$ mit schwach zu Nullfunktion konvergiert.

(c) Zeigen Sie den Limes $\mathsf{limsup}_{m,n\to\infty}\|f_m(x) - f_n(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 2$.

(Hinweis: Benutzen Sie die folgende Stetigkeitseigenschaft des Lebesgue-Integrals: Ist $f(x)$ Lebesgue-integrabel auf $\mathbb{R}$ und $A_n \subset \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Mengen mit $\mu(A_n) \to 0$, so gilt $\int_{A_n} f(x)dx \to 0$.)

Aufgabe 4. (4 Punkte). (Vergleich von schwachen Konvergengen.)

Es sei $\mathbf{e}_n$ die Folge in $\ell^1 \cap \ell^2$ mit $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1_n, 0, \dots)$ (1 auf n-te Stelle, sonst 0).

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $\mathbf{e}_n$ schwach in ℓ^2 zu 0 konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $\mathbf{e}_n$ *nicht* schwach konvergent in ℓ^1 ist.

(Hinweis: Benutzen Sie die Identitäten $(\ell^2)^* = \ell^2$ und $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ für die entsprechenden Dualräumen).