Mathematik für Physiker IV

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 6

Abgabetermin: 2. Juni (Mi.) in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte). Es sei $X := L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2/2})$ der Hilbertraum komplexer Funktionen $f(x)$ auf $\mathbb{R}$ mit $\langle f(x), g(x)\rangle := \int \bar{f}(x)\, g(x)\, e^{-x^2/2} dx$.

(a) Zeigen Sie, dass alle Polynome $P(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ liegen in X.

(b) Es sei $\mathcal{B} = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3 \ldots\}$ das ON-System der Polynome mit $\mathsf{Grad}(p_i) = i$, das man aus dem System $\mathcal{P} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ mit dem Gram-Schmidt-Verfahren Finden Sie die ersten 4 Polynome des ortonormierten Systems $\mathcal{B}$ $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots\}$

(Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften der Fourier-Transformation.)

Aufgabe 2. (4 Punkte). Für $1 \leqslant p < +\infty$ ist die p-Norm von $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch $\|v\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ definiert. Für $p = \infty$ setzt man $\|v\|_\infty := \mathsf{sup}(|x|, |y|)$. Zeigen Sie, dass der Dualraum zu $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ der Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_q)$ mit $1/p + 1/q = 1$ ist.

(Hinweis: Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung.)

Aufgabe 3. (4 Punkte). Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Normen $\|\cdot\|_p$ aus der Aufgabe 2:

(a) $\|v\|_p$ ist stetig als eine Funktion von $v \in \mathbb{R}^2$ und $p \in [1, +\infty)$

(b) $\mathsf{lim}_{p\to+\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$.

Aufgabe 4. (4 Punkte). Es seien $p, q, r > 1$ mit $1/p + 1/q + 1/r = 1$ und $f(x), g(x), h(x)$ drei Funktionen auf $I := [0, 1]$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\|f(x)\, g(x)\, h(x)\|_{L^1(I)} \leqslant \|f(x)\|_{L^p(I)} \cdot \|g(x)\|_{L^q(I)} \cdot \|h(x)\|_{L^r(I)}.$$

(Hinweis: Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung.)