Mathematik für Physiker IV

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 5

Abgabetermin: 19. Mai (Mi.) in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (6 Punkte). Berechnen Sie die Umlaufzahl $n(\gamma, z_0)$ in folgenden Fällen:

(a) $\gamma(t) := (6\cos(2t), 17\sin(t))$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $z_0 = 0$;

(b) $\gamma(t)$ ist das Bild des Einheitskreises $|w| = \frac{1}{2}$ unter der Abbildung $F(w) = w + \frac{1}{w}$ und $z_0 = 0$.

(c) $\gamma(t)$ ist das Bild des Einheitskreises $|w| = \frac{3}{2}$ unter der Abbildung $F(w) = w + \frac{1}{w}$ und $z_0 = 0$.

(Hinweise: Benutzen Sie auch den Residuensatz für Integrale $\int_\gamma f(z)\frac{g'(z)}{g(z)}dz$. Das Polynom $P(z) = 6(z^4 + 1) + 17(z^3 - z)$ hat Nullstellen $z_1 = -2$ und $z_2 = \frac{1}{2}$.)

Aufgabe 2. (4 Punkte). Zeigen Sie, dass eine holomorhpe Funktion $f(z)$ in der punktierten Kreisscheibe $\check{\Delta}$ eine holomorphe Stammfunktion $F(z) \in \mathscr{O}(\check{\Delta})$ besitzt wenn das Residuum $\mathsf{Res}_{z=0}(f(z))$ verschwindet.

Aufgabe 3. (6 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

(a) $\displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} \frac{dt}{4 + \sin^2 t}$;

(b) $\displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{1 + 2a\cos t + a^2}dt$ mit $-1 < a < 1$;

(c) $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{x^2 + 4}$;

(d) $\displaystyle\int_{x=-\infty}^{+\infty} \tfrac{\sin^2 x}{x^2+a^2}dx$;

(e) $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2 + b^2)^2}$ mit $a, b > 0$.