

## Übungsblatt 4

**Abgabetermin:** 12. Mai (Mi.) in der Vorlesung.

**Aufgabe 1.** (6 Punkte). Es sei  $A_{r,R}(a)$  der Kreisring  $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ . Berechnen Sie die Laurentreihen in vorgegebenen Kreisringen:

(a)  $f(z) := \frac{4z - z^2}{(z^2 - 4)(z + 1)}$  in  $A_{0,1}(0)$ ,  $A_{1,2}(0)$  und  $A_{2,\infty}(0)$ .

(b)  $g(z) = \sin\left(\frac{z-1}{z}\right)$  in  $A_{0,\infty}(0)$ .

(Hinweise: Im Teil (a) machen Sie zuerst die Partialbruchzerlegung. Im Teil (b) benutzen Sie die Additionsformel für  $\sin(z)$ .)

**Aufgabe 2.** (6 Punkte). Bestimmen Sie die Singularitäten (einschließlich Pole) folgender Funktionen und berechnen Sie die entsprechende Residuen.

(a)  $f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^3}$ ;

(b)  $g(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$ ;

(c)  $h(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)^2}$ ;

(d)  $k(z) = \frac{1}{e^z + 1}$ .

**Aufgabe 3.** (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

(a)  $\int_{\partial\Delta(0,10)} \frac{dz}{\sin^2 z \cos z}$ ;

(b)  $\int_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1} dz$  wobei  $\gamma$  der Rand des Halbkreises  $K_+ := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 2, \Im(z) > 0\}$  ist.