Mathematik für Physiker IV

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 3

Abgabetermin: 5. Mai (Mi.) in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte). Bestimmen Sie den Typ der folgenden Singularitäten und wenn möglich den Wert der Funktion im entsprechenden Punkt.

(a) $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$ in $z = 0$;

(b) $g(z) = \exp(-\frac{1}{z^2})$ in $z = 0$;

(c) $h(z) = \cos\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ in $z = -1$;

(d) $k(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte). Finden Sie gebrochen lineare Abbildungen mit folgenden Werten in angegebenen Punkten:

(a) $F(z)$ mit $F(0) = 1$, $F(1) = \mathrm{i}$ und $F(\infty) = -1$;

(b) $G(z)$ mit $G(0) = 1$, $G(1) = 2$ und $G(2) = 0$.

Aufgabe 3. (4 Punkte). Die Cayley-Transformation ist die gebrochen lineare Abbildung $\Phi(z) = \frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}$. Zeigen Sie, dass die Cayley-Transformation die reelle Achse $\Im(z) = 0$ auf die Kreislinie $|w| = 1$ abbildet.

Aufgabe 4. (4 Punkte). Zeigen Sie, dass die reelle Funktion $f(x, y) = \sin x \sinh y$ harmonisch ist, und finden Sie eine reelle Funktion $g(x, y)$, so dass die Funktion $F(x, y) := f(x, y) + \mathrm{i}\, g(x, y)$ holomorph ist.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion $h(z) := \frac{\partial f}{\partial z}$ holomorph ist, und betrachten Sie den Real- und Imaginärteil der Funktion $H(z) := 2 \int h(z) dz$. Benutzen Sie die komplexen Koordinaten $z, \bar{z}$ statt der reellen x, y.)