Mathematatik für Physiker IV

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 2

Abgabetermin: 28. April (Mi.) in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte). Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Mengen und $f(z)$, $g(w)$ zwei C^1-glatte komplexe Funktionen von Variablen $z \in U$ und entsprechend $w \in V$ so dass $f(U) \subset V$. Ferner sei $h := g \circ f$. Beweisen Sie die folgenden Kettenregeln:

(1) $\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$,

(2) $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$,

wobei $\bar{f}(z)$ die komplex konjugierte Funktion zu $f(z)$ ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte). Beweisen Sie die Formeln

(1) $\mathsf{cos}(\alpha + \beta) = \mathsf{cos}\alpha \, \mathsf{cos}\beta - \mathsf{sin}\alpha \, \mathsf{sin}\beta$ und

(2) $\mathsf{sin}(\alpha + \beta) = \mathsf{sin}\alpha \, \mathsf{cos}\beta + \mathsf{cos}\alpha \, \mathsf{sin}\beta$.

(Hinweis: Benutzen Sie die Euler-Formel $e^{\mathsf{i}\varphi} = \mathsf{cos}\varphi + \mathsf{i}\,\mathsf{sin}\varphi$ und die Additionsformel $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.)

Aufgabe 3. (4 Punkte). Berechnen Sie die Taylor-Reihen folgender Funktionen:

(1) $f(z) = \frac{\mathsf{sin}(z)}{z}$ im Punkt $z_0 = 0$;

(2) $g(z) = \mathsf{arctan}(z)$ im Punkt $z_0 = 0$;

(3) $h(z) = \mathsf{log}(1 + z)$ im Punkt $z_0 = 0$.

(Hinweis: In Fällen (2) und (3) berechnen Sie zuerst die Taylor-Reihen für die Ableitungen $g'(z)$ und $h'(z)$.)

Aufgabe 4. (4 Punkte). Bestimmen Sie das Integral $\int_\gamma \frac{\mathsf{sin} z}{(z^2-1)} dz$, wobei γ die Ellipse gegeben durch die Gleichung $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ ist.

(Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Integralformel $f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial G} \frac{f(z)\, dz}{z - z_0}$.)