Mathematik für Physiker IV

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 11

Abgabetermin: 7. Juni (Mi.) in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte). Es sei $k(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion und $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ der Faltungsoperator gegeben durch $f \mapsto k * f$ mit $(k * f)(x) := \int_{y \in \mathbb{R}} k(x-y) f(y) dy$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$. Finden Sie die Bedingung auf $k(x)$ so dass F selbstadjungiert ist.

(Hinweis: Der Operator $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ist beschränkt mit $\|F\|_{\mathsf{op}} \leqslant \|k(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Sie können eventuell die Fourier-Transformation und ihre Eigenschaften benutzen.)

Aufgabe 2. (4 Punkte). Es sei $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ der Operator aus der Aufgabe 1 mit $k(x) = e^{-x^2/2}$. Zeigen Sie, dass F normal ist und berechnen Sie das Spektrum von F.

(Hinweis: Berechnen Sie den „Fourier-transformierten Operator“ $\widehat{F} := \mathscr{F} \circ F \circ \mathscr{F}^{-1}$, und benutzen Sie die Tatsache, dass die Fourier-Transformation $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ eine Hilbertraum-Isometrie.)

Aufgabe 3. (8 Punkte). Es sei $H := L^2([0,1])$, $D := C^1([0,1]) \subset H$ und $T : D \to H$ definiert durch $T(f(x)) := \mathsf{i}\frac{d}{dx} f(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass T dicht definiert ist, und berechnen Sie die Graphennorm von T.

(b) Zeigen Sie, dass $f(x) \in D$ im Definitionsbereich von T^* liegt, genau dann wenn $f(0) = f(1) = 0$. (Hinweis: Zeigen Sie die Formel $\langle g(x), Tf(x) \rangle - \langle Tg(x), f(x) \rangle = \bar{g}(1) f(1) - \bar{g}(0) f(0)$.)

(c) Zeigen Sie die Inklusion $T^* \subset T^{**}$ und die Gleichung $T^* = T^{***}$.

(d) Zeigen Sie, dass T^* abgeschlossen, symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert ist.

(Hinweis: Benutzen Sie die folgende Tatsache: Die $W^{1,2}$-Norm auf einem Intervall $[a,b]$ ist definiert durch $\|f(x)\|^2_{W^{1,2}([a,b])} := \|f(x)\|^2_{L^2([a,b])} + \|\frac{d}{dx} f(x)\|^2_{L^2([a,b])}$. Für jede differenzierbare Funktion $f(x)$ und jede $c < d$ gilt $|f(c) - f(d)| \leqslant |c-d|^{1/2} \cdot \|f(x)\|^2_{W^{1,2}([c,d])}$, insbesondere ist jede Funktion $f(x)$ mit der beschränkten $W^{1,2}$-Norm auf einem Intervall $[a,b]$ stetig auf $[a,b]$.)