Mathematik für Physiker IV

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 10

Abgabetermin: 30. Juni (Mi.) in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte). Es sei $T : \ell^2 \to \ell^2$ der Operator mit

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) := (0, \tfrac{a_1}{1}, \tfrac{a_2}{2}, \tfrac{a_3}{3}, \ldots).$$

(a) Zeigen Sie, dass T kompakt ist. (Hinweis: Finden Sie eine Folge $F_n \in \mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)$ von endlich-dimensionalen Operatoren mit $\|T - F_n\|_{\mathsf{op}} \longrightarrow 0$.)

(b) Zeigen Sie, dass $1 - T$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte). Es seien $p \leqslant q \in [1, +\infty]$ und $I : \ell^p \to \ell^q$ der "Identitätsoperator" mit $I : (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$.

(a) Zeigen Sie, dass I beschränkt ist, und berechnen Sie die Norm $\|I\|_{\mathsf{op}}$.

(b) Zeigen Sie, dass $I : \ell^p \to \ell^q$ nicht kompakt ist.

(Hinweis: Finden Sie eine beschränkte Folge $v_\nu = (a_{\nu,1}, a_{\nu,2}, a_{\nu,3}, \ldots)$ aus ℓ^p, so dass $I(v_\nu)$ keine konvergente in ℓ^q Teilfolge zulässt.)

Aufgabe 3. (4 Punkte + 1 Zusatzpunkt). Es sei (λ_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ und $T : \ell^2 \to \ell^2$ der Operator gegeben durch

$$T : (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \mapsto (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \lambda_3 a_3, \lambda_4 a_4, \ldots)$$

(a) Zeigen Sie, dass T beschränkt ist, und dass jedes λ_n zum Spektrum $\sigma(T)$ gehört.

(b) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Zahl, so dass $|\lambda - \lambda_n| \geqslant \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$ unabhängig von λ_n. Zeigen Sie, dass $\lambda - T$ invertierbar ist.

(c) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(T)$.

Aufgabe 4. (4 Punkte.)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes C^1-glattes Gebiet und $\mathcal{A}(G) := \mathscr{O}(G) \cap C^0(\overline{G})$ der Raum von holomorphen in G Funktionen, die stetig bis zu Rand ∂G ist, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} = \|\cdot\|_{\mathsf{sup}}$. Ferner sei $T_z : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)$ der Operator mit $T_z(f(z)) := z \cdot f(z)$.

Berechnen Sie das Spektrum $\sigma(T)$.

(Hinweis: Sie müssen nicht beweisen, dass $\mathcal{A}(G)$ ein Banachraum ist.)