Mathematik für Physiker IV

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 1

Abgabetermin: 21. April (Mi.) in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte). Berechnen Sie den Konvergenzradius folgender Reihen:
(1) $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$.
(2) $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$.
(3) $\mathsf{sin}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$.
(Hinweis: Benutzen Sie die Stierling-Formel $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(\frac{1}{n}))$ für $n \longrightarrow +\infty$)

Aufgabe 2. (4 Punkte).
(1) Für welche z mit $|z| = 1$ konvergieren die Reihen $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$ bzw. $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$ aus der Aufgabe 1?
(2) Berechnen Sie die Summe der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$ und zeigen Sie, dass die entsprechende Funktion $g(z)$ sich auf die reelle Achse Ox analytisch fortsetzt.

Aufgabe 3. (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Integrale:
(1) $\int_\gamma z^k \bar{z}^l dz$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ und $\gamma := \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$ die Kreislinie von Radius R.
(2) Das Integral $\int_\gamma \alpha$ der 1-Form $\alpha = xdz + |z|^2 d\bar{z}$ entlang des Dreiecks γ mit den Ecken $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$ und $P_2 = (0, 1)$.

Aufgabe 4. (4 Punkte). Berechnen Sie die äußeren Ableitungen folgender Funktion bzw. 1-Formen.
(1) $f(x, y) = \mathsf{sin}^2 x + \frac{z^2}{\bar{z}}$;
(2) $\alpha = xdz + |z|^2 d\bar{z}$;
(3) $\psi = \frac{dz}{z}$