Mathematik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Testklausur

Termin: 15. Januar, 9:00–9:45, Hörsaal H1 (Bundesstraße, 55)

Name, Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Gruppen-Nr., -Leiter: ....

Schriftliche Hilfsmittel (Bücher, Skript, usw.) sind nicht zugelassen!

Ergebnisse:

A1	A2a	A2b	A3	A4a	A4b	A5a	A5b

Aufgabe 1. (2 Punkte.) Ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ Riemannsch-integrierbal über $[0, 1]$? Welche Bedingungen auf $f(x)$ sind (nicht) erfüllt?

Lösung: Nach dem Satz 1.1 aus der Vorlesung ist eine Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $I = [a, b]$ Riemannsch-integrierbar g.d.w. $f(x)$ beschränkt und fast überall stetig ist.

In unserem Fall ist die Funktion $f(x)$ stetig überall außer 0, also fast überall, aber nicht beschränkt, da $\lim\limits_{\times \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Aufgabe 2. (1+1 Punkte.)

2a. Geben Sie die Definition einer Nullmenge N in $\mathbb{R}$.

2b. Was bedeutet, dass zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ fast überall gleich sind?

2a. Lösung: Definition 1.3 auf S. 6: Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}$ ist eine **Nullmenge** falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ eine Überdeckung der Menge N von Intervallen $I_i = [a_i, b_i]$ so dass $\sum_i |I_i| < \varepsilon$.

Der Begriff Überdeckung bedeutet, dass N in der Vereinigung von I_i liegt, dass heißt, $N \subset \cup_i I_i$. $|I_i|$ steht für die Länge von I_i, $|I_i \models b_i - a_i$.

2b. Lösung: Die **Notation** gleich nach **Definition 1.3** besagt: Eine Eigenschaft $\mathcal{A}(x)$ gilt **fast überall** falls es eine Nullmenge N existiert, do dass $\mathcal{A}(x)$ gilt für alle $x \notin N$.

Also $f(x) = g(x)$ fast überall $\Leftrightarrow N := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$ (die Menge wo $f(x)$ und $g(x)$ verschieden sind) eine Nullmenge ist.

Aufgabe 3. (2 Punkte.)
Geben Sie die Formel für die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung.

Lösung: Definition 5.3 auf S. 52: Die Fourier-Transformation einer Funktion $f(x)$ ist definiert durch $\hat{f}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}\langle x,y\rangle} d^n x$ wobei $\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Nach dem **Satz 5.3**, (Fou1), ist die Fourier-Transformierte $\hat{f}(y)$ wohl-definiert und stetig, vorausgestzt dass $f(x)$ Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 4. (2 Punkte + 2 Zusatzpunkte.)
4a. Formulieren Sie die Hölder-Ungleichung.
4b. Zeigen Sie die Ungleichung $\|f(x)\|_{L^1(K)} \leqslant \pi^{2/3} \cdot \|f(x)\|_{L^3(K)}$ für Funktionen auf Einheitskreis $K := \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Lösung. 4a.: Satz 4.1 auf S. 42: Es sei X eine Menge, μ ein Maß auf (eine σ-Algebra auf X) und p, q Zahlen mit $1 < p, q < +\infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann für alle (komplexwertige) Funktionen $f(x), g(x)$ auf X gilt: $\|f(x) \cdot g(x)\|^*_{L^1(X,\mu)} \leqslant \|f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} \cdot \|g(x)\|^*_{L^q(X,\mu)}$. Darüber hinaus, falls $f(x)$ und $g(x)$ entsprechend L^p- und L^q-integrierbar sind, dann ist $f(x) \cdot g(x)$ integrierbar, so dass die obere Halbnormen $\|\cdot\|^*_{L^{\cdots}(X,\mu)}$ Normen sind:

$$\|f(x) \cdot g(x)\|_{L^1(X,\mu)} \leqslant \|f(x)\|_{L^p(X,\mu)} \cdot \|g(x)\|_{L^q(X,\mu)}. \tag{Hö1}$$

Im **Satz 4.2** auf S. 44 wird die **starke Hölder-Ungleichung** bewiesen. Für (X, μ) wie oben und reelle Zahlen p, q, r mit $1 < p, q, r < +\infty$ und $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ gilt:

$$\|f(x) \cdot g(x)\|_{L^r(X,\mu)} \leqslant \|f(x)\|_{L^p(X,\mu)} \cdot \|g(x)\|_{L^q(X,\mu)}. \tag{Hö2}$$

Als richtige Lösung gilt jede von beiden Ungleichungen (Hö1) und (Hö2), als der Raum X kann $\mathbb{R}^n$ oder ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Maß angegeben werden.

Lösung von 4b. Für eine beliebige (L^3-integrierbare) Funktion $f(x)$ auf der Einheitskreisscheibe $K \subset \mathbb{R}^2$ setze $g(x) = 1$ (konstante Funktion), $p = 3$ und $q = \frac{3}{2}$. Dann $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und damit

$$\|f(x)\|_{L^1(K)} \leqslant \|f(x)\|_{L^3(K)} \cdot \|1\|_{L^{3/2}(k)}.$$

Dabei $\|1\|_{L^{3/2}(k)} = \left(\int_K 1^{3/2} d^2x\right)^{2/3} = (\mu(K))^{2/3} = \pi^{2/3}$, da das Lebesgue-Maß von K die Fläche von K ist, und damit $\mu(K) = \pi$.

Aufgabe 5. (2 Punkte + 2 Zusatzpunkte.)

5a. Geben Sie die Definition von Schwartzschen Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

5b. Zeigen Sie, dass jede Funktion $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ Lebesgue-integrierbar ist.

Lösung von 5a. Die **Definition 5.5** auf S. 55 besagt: der Schwrtzsche Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ besteht aus **glatter schnell fallender** Funktionen. Dabei ist eine glatte Funktion $f(x)$ schnell fallend falls für jede Multiindizen $I = (i_1, \ldots, i_n), J = (j_1, \ldots, j_n)$ das Produkt „Polynom×Ableitung“ $x^I \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} f(x)$ beschränkt ist.

Lösung von 5b. Das **Hilfslemma** auf S. 62 besagt: Für jedes $s > n$ ist die Funktion $\frac{1}{(1+|x|)^s}$ Lebesgue-integrierbar in $\mathbb{R}^n$. Ähnlich zeigt man, dass $\frac{1}{1+x^2}$ Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}$ und $\frac{1}{x^2}$ Lebesgue-integrierbar auf $[1, +\infty)$ sind.

Nun für jede Funktion $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ existiert eine Konstante C so dass $|f(x)| \leqslant C$ und $|f(x)| \leqslant \frac{C}{x^2}$. Deshalb ist die Funktion $g(x) = \begin{cases} C & x \in [-1, 1] \\ \frac{C}{x^2} & |x| \geqslant 1 \end{cases}$ eine Majorante für $f(x)$. Da $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx$ endlich ist, ist $f(x)$ Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}$. Alternativ kann mann die Funktion $h(x) = \frac{C'}{1+x^2}$ mit einer geeigneten Konstante C' als eine Majorante für $f(x)$ benutzen.