Mathematik III für Studierende der Physik

Dr. Vsevolod Shevchishin

Universität Hamburg
Wintersemester 2009/2010

Vorbemerkungen und Allemeine Information

Dies ist ein Skript zur Vorlesung

Mathematik III für Studierende der Physik

Vorlesung

Di.+Fr. 8:15–9:45, Hörsaal H1, Geomatikum (Bundesstraße 55)

Übungsgruppen: Geomatikum (Bundesstraße 55)

1. Di. 12–14, Raum 431, Hung Ming Tsoi + Hendrik Papenjohann
2. Di. 10–12, Raum 431, Hung Ming Tsoi + Matthias Lange
3. Di. 10–12, Raum 434, Shevchishin + Niklas Hübel
4. Di. 10–12, Raum 435, Shevchishin + Carsten Liese
5. Mi. 14–16, Raum 431, Hung Ming Tsoi + Stephanie Ziegenhagen
6. Mi. 14–16, Raum 435, Hung Ming Tsoi + Oleksandr Yefremov

Tutorium: (ab 2, Vorsesungswoche), Jungiusstraße 9

1. Mo. 18.15–19.45 SemRm 1, Niklas Hübel + Christian Reichwagen
2. Mi. 14.00–16.00 SemRm 2, Martina Beer + Sebastian Schubert
3. Fr. 12.15–13.45, Geomatikum 1311.

Literatur

Als Hauptquelle benutze ich die folgenden Bücher

- Fo-3 Otto Forster; *Analysis 3*, Vieweg Verlag, 4. Auflage, 2007
- Kö-2 Konrad Königsberger; *Analysis 2*, Springer Verlag, 4. Auflage, 2002

Als alternative Quellen möchte ich empfehlen:

- FK-2 Helmut Fischer / Helmut Kaul; *Mathematik für Physiker 2*, Vieweg Verlag, 4. Auflage, 2007
- BF-2 Martin Barner / Friedrich Flohr; *Analysis II*, de Gruyter Verlag, 1983
- Ru Walter Rudin; *Analysis*, dt. Übersetzung, Physik Verlag, 198

Zusätzliche Literatur

insbesondere zum Thema *das Riemannsche Integral*

- Fo-1 Otto Forster; *Analysis 1*, Vieweg Verlag, 9. Auflage, 2008
- Fo-2 Otto Forster; *Analysis 2*, Vieweg Verlag, 7. Auflage, 2006
- Kö-1 Konrad Königsberger; *Analysis 1*, Springer Verlag, 6. Auflage, 2004
- Bl Christian Blatter; *Analysis 1*, Springer Verlag, 4. Auflage, 1991

I. Das Riemannsche Integral

Definition 1.1 (Riemannsche Integral)

$I := [a,b]$ *bezeichnet ein Intervall,* $|I| := b-a$ *ist seine Länge.* *Eine* **Unterteilung** $\mathcal{I}$ *von* I *ist eine Zerlegung* $I = [a_0,a_1] \cup [a_1,a_2] \ldots \cup [a_{N-1},a_N]$ *mit* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_N = b$, $I_i := [a_{i-1},a_i]$.

Die **Feinheit** *der Unterteilung* $\eta(\mathcal{I}) := \max(|I_1|,|I_2|,\ldots,|I_N|)$.

Stützstellen *sind Punkte* $\xi_i \in I_i$, *die gesamte Menge wird mit* $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_i\}$ *bezeichnet.*

Es sei $f(x)$ *eine Funktion auf* $I = [a,b]$. *Die* **Riemannsche Summe** –

$$S(f,\mathcal{I},\boldsymbol{\xi}) := \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(a_i - a_{i-1}).$$

Das **obere** *bzw.* **untere Riemannsche Integral**

$$\int_a^{*\,b} f(x)dx := \limsup_{\eta(\mathcal{I})\to 0} S(f,\mathcal{I},\boldsymbol{\xi}) \qquad \int_{*\,a}^{b} f(x)dx := \liminf_{\eta(\mathcal{I})\to 0} S(f,\mathcal{I},\boldsymbol{\xi})$$

$f(x)$ *ist* **Riemannsch integrierbar** *auf* $[a,b] \Leftrightarrow \int_a^{*\,b} f(x)dx = \int_{*\,a}^{b} f(x)dx$ *Dieser Wert wird das* **Riemannsche Integral** *genannt und mit* $\int_a^b f(x)dx$ *bezeichnet.*

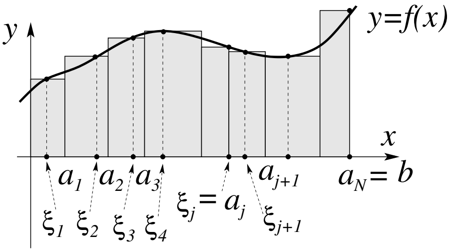

Abbildung 1: Unterteilung und Stützstellen. Die Riemannsche Summe $S = \sum_i f(x_i) \cdot |I_i|$ ist die markierte Fläche.

Bemerkung. Die Notation $\int_{x=a}^{b} f(x)dx$ bezeichnet die Summe $\sum f(x_i)\Delta x_i$ (mit dem Zeichen $\int$ als stilisierte Buchstabe S) wobei der Schritt Δx_i infinitisemal klein ist. Riemannschen Summen formalisieren diese naive Vorstellung von Integral.

Definition 1.2 (Oszillation)

Die **Oszillation** *(Schwankung) einer Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $I = [a, b]$ ist*

$$\operatorname{osc}(f, I) := \sup\{f(x) : x \in I\} - \inf\{f(x) : x \in I\} = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I\}$$

Die **Oszillation** *in einem Punkt $x_0 \in I$ ist* $\operatorname{osc}(f, x_0) := \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \operatorname{osc}(f, [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$.

Wichtige Eigenschaft

$\operatorname{osc}(f, x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ ist stetig in x_0.

Definition 1.3 (Nullmenge)

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ *ist eine* **Nullmenge** $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ *Überdeckung von* M *mit Intervallen* $I_i = [a_i, b_i]$ $(\Leftrightarrow M \subset \cup_i I_i)$ *so dass* $\sum_i |I_i| < \varepsilon$.

Notation

Eine Eigenschaft $\mathcal{A}$ gilt **fast überall** ($\Leftrightarrow$ für fast alle x) falls $\mathcal{A}(x)$ ist gültig für alle x außer einer Nullmenge M.

Satz 1.1

Eine Funktion $f(x)$ *auf einem Intervall* $I = [a, b]$ *ist Riemannsch-integrierbar g.d.w.* $f(x)$ *ist beschränkt und fast überall stetig.*

Beweis. Teil „$\Leftarrow$“. Es seien $\mathcal{I}' = \{I_i'\}, \mathcal{I}'' = \{I_j''\}$ zwei Unterteilungen und $\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi}''$ zwei Mengen von Stützstellen. Definiere $I_{ij}^{\cap} := I_i' \cap I_j''$. Im Falle $I_{ij}^{\cap} \neq \varnothing$ definiere $I_{ij}^{\cup} := I_i' \cup I_j''$.

i. Behauptung. $I_{ij}^{\cap} \neq \varnothing \Rightarrow \operatorname{osc}(f, I_{ij}^{\cup}) \leqslant \operatorname{osc}(f, I_i) + \operatorname{osc}(f, I_j)$.

Beweis. Man muss 4 Fälle betrachten. Der Fall

$$\inf(f(x), x \in I_i') \leqslant \inf(f(x), x \in I_j'') \quad \text{und} \quad \sup(f(x), x \in I_i') \geqslant \sup(f(x), x \in I_j'')$$

ist offensichtlich (warum?), der Fall

$$\inf(f(x), x \in I_i') \geqslant \inf(f(x), x \in I_j'') \quad \text{und} \quad \sup(f(x), x \in I_i') \leqslant \sup(f(x), x \in I_j'')$$

auch.

In dem Fall

$$\inf(f(x), x \in I_i') < \inf(f(x), x \in I_j'') \quad \text{und} \quad \sup(f(x), x \in I_i') < \sup(f(x), x \in I_j'')$$

beachten wir, dass in diesem Fall für jedes $x_0 \in I_{ij}^{\cap} = I_i' \cap I_j''$ gilt

$$\operatorname{osc}(f(x), I_{ij}^{\cup}) = \sup(f(x), x \in I_j'') - \inf(f(x), x \in I_i') =$$
$$\big(\sup(f(x), x \in I_j'') - f(x_0)\big) + \big(f(x_0) - \inf(f(x), x \in I_i')\big)$$
$$\leqslant \operatorname{osc}(f(x), x \in I_j'') + \operatorname{osc}(f(x), x \in I_i').$$

Der letzte Fall wird endlich betrachtet. □

ii. Behauptung. $|S(f, \mathcal{I}', \boldsymbol{\xi}') - S(f, \mathcal{I}'', \boldsymbol{\xi}'')| \leqslant \sum_i \operatorname{osc}(f, I_i')|I_i'| + \sum_j \operatorname{osc}(f, I_j'')|I_j''|$.

Beweis. Erstens, $S(f, \mathcal{I}', \boldsymbol{\xi}') = \sum_{i,j} f(\xi_i') \cdot |I_{ij}^{\cap}|$ und $S(f, \mathcal{I}'', \boldsymbol{\xi}'') = \sum_{ij} f(\xi_j'') \cdot |I_{ij}^{\cap}|$.
Deshalb $|S(f, \mathcal{I}', \boldsymbol{\xi}') - S(f, \mathcal{I}'', \boldsymbol{\xi}'')| \leqslant \sum_{ij} |f(\xi_i') - f(\xi_j'')| \cdot |I_{ij}^{\cap}| \leqslant \sum_{ij} \operatorname{osc}(f(x), I_{ij}^{\cup}) \cdot |I_{ij}^{\cap}|$
$\leqslant \sum_{ij} \big(\operatorname{osc}(f(x), x \in I_i') + \operatorname{osc}(f(x), x \in I_j'')\big) \cdot |I_{ij}^{\cap}|$
$= \sum_i \operatorname{osc}(f, I_i')|I_i'| + \sum_j \operatorname{osc}(f, I_j'')|I_j''|$. □

iii. Folgerung. Es reicht zu zeigen, dass $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \big\{\sum_i \operatorname{osc}(f, I_i)|I_i| : \max(I_i) \leqslant \varepsilon\big\} = 0$.

Es sei $N := \{x \in I : \operatorname{osc}(f, x) > 0\}$. Damit ist N die Menge der Unstetigkeit von $f(x)$.
Nach Annahme ist N eine Nullmenge. Es sei $M := \operatorname{osc}(f(x), I)$.
Fixiere $\varepsilon > 0$ und eine Überdeckung $N \subset \cup_k J_k$ von Intervallen $J_k = [c_k, d_k]$ mit $\sum_k |J_k| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot M}$. Vergrößere Intervalle J_k und setze $J_k^+ := [c_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+3} \cdot M}, d_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+3} \cdot M}]$.
Damit $\sum_k |J_k^+| < \frac{\varepsilon}{2M}$ und jedes J_k liegt in Innerem $\mathring{J}_k^+ = (c_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+3} \cdot M}, d_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+3} \cdot M})$.
Setze $V := \cup_k \mathring{J}_k^+$.

iv. Hilfssatz. $\forall \delta > 0\ \exists \eta > 0$ s.d. für jedes Intervall $I^* = [a^*, b^*] \subset I$ mit $|I^*| < \eta$ gilt: entweder I^* liegt in V, oder $\operatorname{osc}(f, I^*) < \delta$.

Beweis. Widerspruchbeweis. Angenommen wird, dass $\exists$ eine Folge von Intervallen $I_j^* = [a_j^*, b_j^*]$ mit $|I_j^*| \to 0$ und $\operatorname{osc}(f, I_j^*) \geqslant \delta$, so dass kein I_j^* in V liegt. Da das Intervall I kompakt ist, $\exists$ Teilfolge von a_j^* die zu einem $x^* \in I$ konvergiert. OEdA ist solche die Folge a_j^*. Da $|a_j^* - b_j^*| = |I_j^*| \to 0$, konvergiert die Folge b_j^* auch zu x^*. Folglich $\forall \eta > 0\ \exists j_0$ groß genug, so dass $I_{j_0}^*$ liegt in $[x^* - \eta, x^* + \eta]$. Weil $\operatorname{osc}(f, I_j^*) \geqslant \delta$ in jedem Intervall I_j^*, $\operatorname{osc}(f, [x^* - \eta, x^* + \eta]) \geqslant \delta$ für jedes $\eta > 0$. Also $f(x)$ ist nicht stetig in x^* und $x^* \in N$. Anderseits $\exists \eta^* > 0$ so dass $[x^* - \eta^*, x^* + \eta^*]$ liegt in V. Dies wiederspricht der Annahmen. $\square$

Fortsetzung des Beweises des Satzes 1.1. Es sei $\varepsilon > 0$ wie oben. Setze $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2 \cdot |I| + 2}$. Ferner, sei $\eta_\varepsilon > 0$ eine Konstante, die Behauptung vom **Hilfssatz** mit $\delta = \delta_\varepsilon$ erfüllt. Es sei $\mathcal{I} = \{I_i\}$ eine beliebige Unterteilung von I der Feinheit $\max(|I_i|) \leqslant \eta_\varepsilon$. Zerlege die Summe $\sum_i \operatorname{osc}(f, I_i)|I_i|$ in zwei Teilsummen $\sum'$ und $\sum''$, so dass $\operatorname{osc}(f, I_i) < \delta_\varepsilon$ für jeden Summanden der Teilsumme $\sum'$. Damit $I_i \subset V$ für jeden Summanden der anderen Teilsumme. Dann $\sum' \operatorname{osc}(f, I_i) \cdot |I_i| \leqslant \sum_i \delta_\varepsilon \cdot |I_i| \leqslant \delta_\varepsilon \cdot |I| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\sum'' \operatorname{osc}(f, I_i) \cdot |I_i| \leqslant \sum'' \operatorname{osc}(f, I)|I_i| \leqslant M \sum_k |J_k^+| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit $\sum_i \operatorname{osc}(f, I_i)|I_i| < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein ist, müssen das obere und untere Riemannschen Integrale beliebig nahe Werte haben. Also $\int_a^{*b} f(x)dx = {}_*\!\int_a^b f(x)dx$ und damit ist $f(x)$ R-integrierbar. Dies beweist den Teil „$\Leftarrow$“.

Teil „$\Rightarrow$“. **Beschränktheit.** Es sei $f(x)$ eine nicht beschränkte Funktion auf $I = [a, b]$. Dann $\exists$ eine Folge $x_j^* \in I$ mit $\{f(x_j^*)\}$ nicht beschränkt. OEdA konvergiert die Folge zu einem Punkt $x^* \in I$. Es sei $\mathcal{I} = \{I_i\}$ eine beliebige Unterteilung von I. Dann ist eine der Schnittmengen $I_i \cap \{x_j^*\}$ unendlich. Es sei I_{i_0} ein solches Intervall Dann kann man die Riemannschen Summen $S(f, \mathcal{I}, \boldsymbol{\xi})$ beliebig groß machen wenn man alle Stützstellen ξ_i festhält, und ξ_{i_0} entlang die Teilfolge $I_{i_0} \cap \{x_j^*\}$ variiert. Also sind die Riemannschen Summen $S(f, \mathcal{I}, \boldsymbol{\xi})$ nicht beschränkt für jede fixierte Unterteilung. Damit kann $f(x)$ unmöglich R-integrierbar sein.

Stetigkeit fast überall. Es sei nun $f(x)$ eine Funktion, so dass $N := \{x \in I : \mathrm{osc}(f, x) > 0\}$ keine Nullmenge ist. Setze $N_k := \{x \in I : \mathrm{osc}(f, x) > \frac{1}{k}\}$. Dann ist eine der Mengen N_k auch keine Nullmenge (Warum?). Es sei N_m eine solche Menge. Dann $\exists \delta > 0$ so dass $\sum_j |J_j| \geqslant \delta$ für jede Überdeckung von N_m von Intervallen $J_j = [c_j, d_j]$. Ferner sei $\mathcal{I} = \{I_i\}$ eine beliebige Unterteilung von I. Betrachte nur solche Intervalle I_i, so dass N_m einen inneren Punkt x_i^* von I_i enthält. Dann $\mathrm{osc}(f, I_i) \geqslant \mathrm{osc}(f, x_i^*) \geqslant \frac{1}{m}$ für jedes solche Intervall. Betrachten wir alle mögliche Mengen $\boldsymbol{\xi}$ von Stützstellen für $\mathcal{I}$. Dann $\sup\limits_{\boldsymbol{\xi}} S(f, \mathcal{I}, \boldsymbol{\xi}) - \inf\limits_{\boldsymbol{\xi}} S(f, \mathcal{I}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_i \mathrm{osc}(f, I_i) \cdot |I_i| \geqslant \frac{1}{m} \cdot \delta$ ist von unten durch eine positive Schranke beschränkt. Wieder kann $f(x)$ unmöglich R-integrierbar sein.

Beweisende des Satzes. $\square$

II. Das Lebesguesche Integral

Definition 2.1 (Treppenfunktion)

Ein **Quader** *$Q \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Produkt von Intervallen $I_1 \dots I_n$, $I_i = [a_i, b_i]$.*
Das Volumen eines Quaders ist $\mathrm{Vol}(Q) = |Q| := |I_1| \dots |I_n|$.
Die **charakteristische Funktion** *einer Teilmenge A einer Menge X ist*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in X \backslash A \end{cases}$$

Eine **Treppenfunktion** *ist eine Summe $\varphi(x) = \sum_i c_i \chi_{Q_i}(x)$ mit konstanten c_i ($c_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^k$), wobei Q_i nicht überlappende Quader sind.*

„Nicht überlappend“ bedeutet, dass das Innere von Schnitten $Q_i \cap Q_j$ ist immer leer). Summe kann unendlich sein, aber jedes $x \in \mathbb{R}^n$ wird maximal von 2^n solche Quader Q_i bedeckt (warum?), und damit ist die Summe $\sum_i c_i \chi_{Q_i}(x)$ wohl-definiert.

Erinnerung

Eine numerische Reihe $\sum_i a_i$ (mit $a_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$) heißt **absolut konvergent** falls die Reihe $\sum_i |a_i|$ konvergiert. Für eine absolut konvergente Reihe ist die Summe $\sum_i a_i$ unabhängig von der Umordnung der Reihe (siehe Forster, Analysis 1, *Umordnung von Reihen*).

Definition 2.2 (Integration von Treppenfunktionen)

Das Integral einer Treppenfunktion $\varphi = \sum_i c_i \chi_{Q_i}$ ist $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d^n x := \sum_i c_i \cdot |Q_i|$ falls die Summe absolut konvergent ist, und undefiniert andernfalls.
Das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| d^n x := \sum_i |c_i| \cdot |Q_i|$ heißt die **Lebesguesche L^1-Norm** *und wird durch $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ oder $\|\varphi\|_{L^1}$ bezeichnet. $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ nimmt die Werte in $[0, +\infty]$.*

Lemma 2.1 (Eigenschaften von $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.)

- $\|c \cdot \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |c| \cdot \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ *für $c \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$;*
- $\|\varphi + \psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ *(***Dreiecksungleichung***);*
- $|\varphi(x)| \leqslant |\psi(x)|$ *(punktweise)* $\Rightarrow \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$*;*
- $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0 \Leftrightarrow \varphi(x)$ *verschwindet identisch.*

Definition 2.3 (Majorante einer Funktion)

Eine Funktion $g(x)$ ist eine **Majorante** *einer anderen Funktion $f(x)$ falls $\forall x$ $|f(x)| \leqslant g(x)$. Fall $g(x)$ eine eine Treppenfunktion ist, wird sie* **Treppen-Majorante** *genannt.*

Bemerkungen. $f(x)$ kann $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^k$ sein, $g(x)$ ist nicht-negative.

Sind $g_1(x), g_2(x)$ zwei Majoranten, so ist $g(x) := \min(g_1(x), g_2(x))$ auch eine Majorante.

Definition 2.4 (Obere L^1-Norm)

Die obere L^1-Norm einer beliebigen Funktion $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ ist

$$\|f(x)\|^*_{L^1} = \begin{cases} +\infty & \textit{keine Treppen-Majorante mit } \|\varphi(x)\|_{L^1} < +\infty \textit{ existiert.} \\ \inf(\|\varphi(x)\|_{L^1}) & \varphi(x) \textit{ sind Treppen-Majoranten von } f(x) \end{cases}$$

Lemma 2.2 (Eigenschaften von $\|f\|^*_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.)

- $\|c \cdot f\|^*_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |c| \cdot \|f\|^*_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ *für* $c \in \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$;
- $\|f + g\|^*_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|^*_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|g\|^*_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ *(**Dreiecksungleichung**);*
- $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ *(punktweise)* $\Rightarrow \|f\|^*_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|g\|^*_{L^1(\mathbb{R}^n)}$;
- $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|^*_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ *für Treppenfunktionen.*

Definition 2.5 (Lebesgue-Integrierbarkeit)

Eine Funktion $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ ist **Lebesgue-integrierbar** *falls $\exists$ eine Folge φ_ν von Treppenfunktionen mit $\lim_{\nu\to\infty} \|f - \varphi_\nu\|^*_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$. In diesem Fall $\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\nu(x) d^n x$ heißt das* **Lebesgue-Integral** *von $f(x)$ und wird mit $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x$ bezeichnet.* **Notation:** $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *oder* $f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Notation. Die **triviale Fortsetzung** $\tilde{f}(x)$ einer Funktion $f(x)$ auf einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch $\tilde{f}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Oft wird die triviale Fortsetzung durch $f(x)$ bezeichnet.

Satz 2.3 (R- und L-Integrierbarkeit)

Jede Riemannsch-integrierbare Funktion $f(x)$ auf $I = [a, b]$ ist auch Lebesgue-integrierbar mit $R\int_a^b f(x)dx = L\int_a^b f(x)dx$.

Beweis. Für jede Unterteilung $\mathcal{I}$ von I mit Stützstellen $\boldsymbol{\xi}$ setze $\varphi_{f,\mathcal{I},\boldsymbol{\xi}} := \sum_i f(\xi_i)\cdot\chi_{I_i}$. Dann $\int_I \varphi_{f,\mathcal{I},\boldsymbol{\xi}}\, dx = S(f, \mathcal{I}, \boldsymbol{\xi})$. Außerdem ist $\sum_i \mathrm{osc}(f, I_i)\cdot\chi_{I_i}$ eine Majorante von $f(x) - \varphi_{f,\mathcal{I},\boldsymbol{\xi}}(x)$ und $\int_I \sum_i \mathrm{osc}(f, I_i)\cdot\chi_{I_i} dx = \sum_i \mathrm{osc}(f, I_i)\cdot|I_i|$. Im Beweis vom Satz über Charakterisierung von R-integrierbare Funktionen haben wir gezeigt, dass $\sum_i \mathrm{osc}(f, I_i)\cdot|I_i| \longrightarrow 0$ im Falle wenn die Feinheit $\max(|I_i|)$ beliebig klein wird und $f(x)$ Riemannsch-integrierbar ist. Deshalb konvergiert $\|f(x) - \varphi_{f,\mathcal{I},\boldsymbol{\xi}}(x)\|^*_{L^1(I)}$ zu 0, und damit ist $f(x)$ auch Lebesgue-integrierbar. Außerdem konvergieren $\int_I \varphi_{f,\mathcal{I},\boldsymbol{\xi}}\, dx = S(f, \mathcal{I}, \boldsymbol{\xi})$ zum $R\int_a^b f(x)dx$. □

Definition 2.6 (Lebesgue-Messbarkeit, Lebesguesche Maß)

Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist* **Lebesgue-messbar** $:\Leftrightarrow$ *die charakteristische Funktion* χ_A *ist L-integrierbar. Eine beliebige Teilmenge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist Lebesgue-messbar* $:\Leftrightarrow$ A *ist eine abzählbare Vereinigung* $A = \cup_i A_i$ *von beschränkten Lebesgue-messbaren Mengen* A_i.
Das **obere Lebesguesche Maß** *einer beliebigen Teilmenge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist* $\mu^*(A) := \|\chi_A\|^*_{L^1}$. *Für eine messbare Teilmenge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* $\mu^*(A)$ *das* **Lebesguesche Maß** *und wird mit* $\mu(A)$ *bezeichnet.*

Definition 2.7 (Nullmengen in $\mathbb{R}^n$.)

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist eine* **Nullmenge** $:\Leftrightarrow$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ *Überdeckung* $A \subset \cup_i Q_i$ *von Quadern mit* $\sum_i |Q_i| \leqslant \varepsilon$.

Satz 2.4 (Nullmengen in $\mathbb{R}^n$.)

(i) $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist eine Nullmenge* $\Leftrightarrow \mu^*(A) = 0$;

(ii) *Jede Nullmenge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist messbar;*

(iii) $\|f(x)\|^*_{L^1} = 0 \Leftrightarrow \mu^*\big(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}\big) = 0$.

Beweis. Teil (i), Implikation $\Rightarrow$. Es sei $A \subset \cup_i Q_i$ eine Überdeckung von Quadern mit $\sum_i |Q_i| \leqslant \varepsilon$. Falls nötig, zerlegen wir jeden Quader Q_i in eine endliche Menge von Teilquader $\cup_j Q_{ij}$, so dass jedes Stück Q_{ij} entweder liegt in der Vereinigung $\cup_{k<i} Q_k$, oder nicht überlappt mit Q_k für $k < i$, und so dass die Stücke Q_{ij} sich auch nicht überlappen. Bilden wir eine neue Überdeckung von A von Quadern in dem wir nur die nicht überlappen Zerlegugsstücke Q_{ij} nehmen. Dann ist die Summe $\sum'_{ij} \chi_{Q_{ij}} =: \psi(x)$ von charakteristischen Funktionen von den gewählten Quadern eine Treppenfunktion, die χ_A majoriert. Dabei offensichtlich $\int \psi(x) d^n x \leqslant \sum_i |Q_i| \leqslant \varepsilon$ und damit $\|\chi_A\|^*_{L^1} \leqslant \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\|\chi_A\|^*_{L^1} = 0$. $\square$

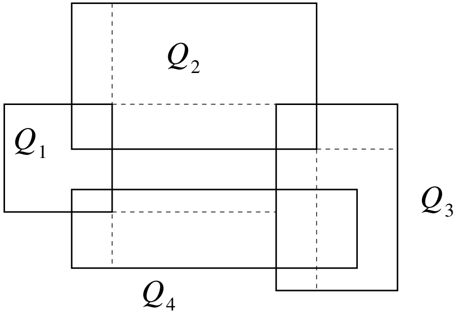

Abbildung 2: Zerlegung von Quadern Q_i. Die Strichlinien sind „Wände" neuer Quaderstücken.

Teil (i), Implikation $\Leftarrow$. Es sei $\varphi(x) = \sum_i c_i \chi_{Q_i}$ eine Treppen-Majorante von χ_A mit $\int \varphi(x) d^n x \leqslant \varepsilon$. Dann $c_i \geqslant 0$. Definiere $c_i^- := 1$ falls $c_i \geqslant 1$, $c_i^- := 0$ falls $0 < c_i < 1$, und setze $\varphi^-(x) := \sum_i c_i^- \chi_{Q_i}$. Dann ist $\varphi^-(x) \geqslant \chi_A(x)$ außer möglicherweise Randpunkten von Q_i. Es sei R_A die Menge von Punkten von A, die auf Ränder von Q_i liegen, und $A^- := A \backslash R_A$. Dann ist $\varphi^-(x)$ eine Majorante von χ_{A^-} und $\int \varphi^-(x) d^n x \leqslant \int \varphi(x) d^n x \leqslant \varepsilon$. Dies gibt uns eine Überdeckung von A^- durch Teilmenge $Q_{i'}$ von Quadern Q_i mit $\sum_{i'} |Q_{i'}| = \int \varphi^-(x) d^n x \leqslant \varepsilon$.
Der Rand von jedem Quader Q ist die Vereinigung von 2^n „Wänden“ W_j, die $(n-1)$-dimensionale Quader sind. Jede solche „Wand“ kann durch einem n-dimensionalen Quader Q_j^W von beliebig kleinem Volumen bedeckt. Man nummeriert alle Wände durch W_j, und wählt die Quader Q_j^W aus der Bedingung $|Q_j^W| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^j}$. Dann $\sum_j |Q_j^W| \leqslant \varepsilon$. Die Gesamtmenge $\{Q_{i'}, Q_j^W\}$ bildet eine Überdeckung von A von Gesamtvolumen 2ε. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist A eine Nullmenge. □

Teil (ii) folgt direkt aus dem Beweis des Teils (i): für $\varphi(x)$ identisch 0 gilt $\|\chi_A - \varphi\|^*_{L^1} = 0$. □

Bemerkung. Wir haben eben gezeigt, dass der Rand eines Quaders eine Nullmenge ist.

Teil (iii), Implikation $\Leftarrow$. Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ definiere $M_k := \{x \in \mathbb{R}^n : k-1 < |f(x)| \leqslant k\}$. Dann ist jede Menge M_k eine Nullmenge. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Finde Überdeckungen $\cup_j Q_{kj}$ von jeweils M_k mit Quadern, so dass $\sum_{kj} k \cdot |Q_{kj}| < \varepsilon$. Wiederhole die Zerlegungsprozedur für die Gesamtmenge $\{Q_{kj}\}$. Es seien $Q_{kj} = \cup_m Q_{kjm}$ die entsteheden Zerlegungen von paarweise nicht überlappenden Quadern. Definiere $\varphi = \sum_{kjm} k \cdot \chi Q_{kjm}$. Dann ist $\varphi(x)$ eine Treppen-Majorante von $|f(x)|$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d^n(x) < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, $\|f\|^*_{L^1} = 0$. □

Teil (iii), Implikation $\Rightarrow$. Für $k = 1, 2, 3, \dots$ definiere $N_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} \leqslant |f(x)| < \frac{1}{k-1}\}$. Dann wird jede Funktion $\frac{1}{k}\chi_{N_k}$ von $|f(x)|$ majoriert. $\Rightarrow \|\frac{1}{k}\chi_{N_k}\|^*_{L^1} = 0 \Rightarrow N_k$ ist eine Nullmenge $\Rightarrow N = \cup_k N_k$ ist eine Nullmenge.

Der Satz 2.4 ist bewiesen. □

Wichtige Folgerung:

Satz 2.5 (Modifikationssatz)

Es seien $f(x), g(x)$ Funktionen in $\mathbb{R}^n$, so dass $f(x)$ L-integrierbar ist und $g(x) = f(x)$ fast überall in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $g(x)$ auch L-integrierbar und $\int f(x)d^nx = \int g(x)d^nx$.

Kurz gesagt, kann man auf Nullmengen eine L-integrierbare Funktion beliebig modifizieren (abändern).

Beweis. Nach Definition existiert es eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ mit $\|f(x) - \varphi_\nu(x)\|^*_{L^1} \longrightarrow 0$. Es sei $h(x) := g(x) - f(x)$. Dann $\mu^*(\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \neq 0\}) = 0$ und damit $\|h(x)\|^*_{L^1} = 0$ nach dem vorigen Satz. Damit $\exists$ eine Folge $\psi_\nu(x)$ von Treppen-Majoranten von $h(x)$ mit $\|\psi_\nu(x)\|^*_{L^1} \longrightarrow 0$. Nach Dreiecksungleichung für obere L^1-Norm (Lemma 2.2) gilt

$$\|g(x) - \varphi_\nu(x) - \psi_\nu(x)\|^*_{L^1} \leqslant \|f(x) - \varphi_\nu(x)\|^*_{L^1} + \|h(x) - \psi_\nu(x)\|^*_{L^1} \longrightarrow 0.$$ □

Für die Erklärung der Begriffe **Äquivalenzrelation** und **Äquivalenzklasse(n)** siehe Wikipedia (Klick aktiviert den Hyperlink).

Definition 2.8

Mit $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir die Raum aller reeller bzw. komplexer Funktionen $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ mit $\|f(x)\|^*_{L^1} = 0$.

Der Raum aller reeller Lebesgue-integrierbarer Funktionen wird mit $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bezeichnet, und $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ in dem Fall komplexer Funktionen.

Zwei Funktionen $f(x), g(x)$ in $\mathbb{R}^n$ sind **Lebesgue-äquivalent** *falls $f(x) = g(x)$ fast überall in $\mathbb{R}^n$.* **Notation:** *$f(x) \sim g(x)$ oder $f(x) = g(x)$ f.ü. oder $f(x) - g(x) \in \mathcal{N}$.*

Man definiere den Raum $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ als den Quotienten-Raum $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})/\mathcal{N}$ und ähnlich $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) = \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})/\mathcal{N}$.

Damit bestehen die Räume $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ aus Lebesgue-Äquivalenzklassen Lebesgue-integrierbarer Funktionen.
Obwohl in der Mathematik müssen zwei Funktionen überall gleiche Werte nehmen um gleich zu sein, in „wirklichen Leben“ (in physikalischen Theorien) kann man Lebesgue-äquivalente Funktionen nicht voneinander unterscheiden: Bei Beobachten verhalten sie sich absolut identisch. Deshalb sind physikalische „Observablen“ Elemente der Quotienten-Räume $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, und nicht von $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Satz 2.6 (Satz von B. Levi über die monotone Konvergenz.)

Es sei f_ν eine Folge von reellen Lebesgue-integrierbaren Funktionen die monoton ist, d.h., $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \dots$ (punktweise überall in $\mathbb{R}^n$) und so dass $\int f_\nu(x) d^n x \leqslant M$ für eine feste obere Schranke M.
Dann konvergiert die Folge $f_\nu(x)$ fast überall in $\mathbb{R}^n$ zu einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $f(x)$ und $\lim \nu \to \infty \int f_\nu(x) d^n x = \int f(x) d^n x$.

Umformulierung für Reihen.

Es sei g_ν eine Folge von reellen Lebesgue-integrierbaren nicht-negativen Funktionen $g_\nu(x) \geqslant 0$ (punktweise überall in $\mathbb{R}^n$) so dass die Reihe $\sum_\nu \int g_\nu(x) d^n x$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_\nu f_\nu(x)$ fast überall in $\mathbb{R}^n$ zu einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $f(x)$ und $\int f(x) d^n x = \sum_\nu \int g_\nu(x) d^n x$.

Beweis. Ersetze jede Funktion $f_\nu(x)$ durch $\tilde{f}_\nu := f_\nu(x) - f_1(x)$. Dann hat die neue Folge die gleichen Eigenschaften wie die alte (mit $\widetilde{M} = M - \int f_1(x) d^n x$) und zusätzlich $\tilde{f}_\nu(x)$ sind nicht-negativ. Außerdem klar ist, dass die Satzbehauptungen für beide Folgen äquivalent sind. OEdA kann man die Folge Ersetze die Folge $\{f_\nu(x)\}$ durch $\{\tilde{f}_\nu(x)\}$ ersetzen.

Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle eine Teilfolge f_{ν_k} so dass $\int f_{\nu_k} d^n x - \int f_{\nu_{k-1}} d^n x \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4^k}$. Es sei $N_k(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f_{\nu_k}(x) - f_{\nu_{k-1}}(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^k}\}$. Dann $\frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \chi_{N_k}(x) \leqslant \big(f_{\nu_k}(x) - f_{\nu_{k-1}}(x)\big)$.
Deshalb $\frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \mu^*(N_k(\varepsilon)) = \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \int \chi_{N_k(\varepsilon)} d^n x \leqslant \int (f_{\nu_k} - f_{\nu_{k-1}}) d^n x \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4^k}$ und damit $\mu^*(N_k(\varepsilon)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}$. Dies impliziert $\mu^*(\cup_k N_k(\varepsilon)) \leqslant \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

Nun für alle x außer $N(\varepsilon) := \cup_k N_k(\varepsilon)$ gilt $\lim f_\nu(x) \leqslant f_{\nu_1}(x) + \sum = f_{\nu_1}(x) + \varepsilon$. Aus dieser Überlegung können wir schließen, dass die Menge $N := \{x : \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = +\infty\}$ liegt in jede $N(\varepsilon)$ und damit $\mu^*(N) \leqslant \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Damit ist N ist eine Nullmenge. Außerdem per Definition von N existiert der Limes $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x)$ für alle $x \notin N$.
Definiere $f(x)$ durch $f(x) = 0$ für $x \in N$ und $f(x) = \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x)$ sonst.

Hilfssatz. Es sei $\{Q_i\}$ eine Folge von Quadern in $\mathbb{R}^n$ und $\{c_i\}$ eine Folge von nicht negativen Zahlen, so dass $\sum_i c_i \cdot |Q_i| < \infty$. Definiere $f(x) = 0$ falls $\sum_i c_i \cdot \chi_{Q_i}(x)$ divergiert und $f(x) = \sum_i c_i \cdot \chi_{Q_i}(x)$ sonst. Dann ist $f(x)$ L-messbar und $\int f(x) d^n x = \sum_i c_i \cdot |Q_i|$.

Beweisende des Satzes von Levi. Definiere $g_\nu := f_\nu - f_{\nu-1}$ für $\nu \geqslant 2$ und $g_1 := f_1$. Dann sind g_ν nicht negativ, L-integrierbar, und $\sum_{i=1}^{\nu} g_\nu = f_\nu$. Somit existieren Treppenfunktionen φ_ν, ψ_ν, so dass $|g_\nu(x) - \varphi_\nu(x)| \leqslant \psi_\nu(x)$ und $\|\psi_\nu\|_{L^1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^\nu}$. Folglich $g_\nu(x) \leqslant \varphi_\nu(x) + \psi_\nu(x)$. Nach Summierung bekommen wir fast überall $f(x) \leqslant \sum_\nu (\varphi_\nu(x) + \psi_\nu(x))$. Jede Summe $\varphi_\nu(x) + \psi_\nu(x)$ ist eine Treppefunktion. Deshalb kann man die Gesamtsumme $\sum_\nu (\varphi_\nu(x) + \psi_\nu(x)) =: h_+(x)$ in der Form $\sum_i c_i \cdot \chi_{Q_i}(x)$ schreiben. Nach dem Hilfssatz oben ist diese Summe L-integrierbar mit $\int \sum_\nu (\varphi_\nu(x) + \psi_\nu(x)) d^n x = \sum_\nu (\int \varphi_\nu(x) d^n x + \int \psi_\nu(x) d^n x)$. Ähnliche Eigenschaften hat die Funktion $\sum_\nu (\varphi_\nu(x) - \psi_\nu(x)) =: h_-(x)$. Nach der Konstruktion $h_-(x) \leqslant f(x) \leqslant h_+(x)$ und $h_+(x) - h_-(x) \leqslant 2 \sum_\nu \psi_\nu(x)$ fast überall. Dies beweist dass, dass $f(x)$ L-integrierbar mit $\int f(x) d^n x = \lim_{\nu\to\infty} \int f_\nu(x) d^n x$. □

Satz 2.7 (Satz von Riesz-Fischer. Vollständigkeit von L^1.)

Es sei f_ν eine Cauchy-Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen in $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$-, $\mathbb{C}$-, oder vektorwertig). Dann existiert $f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ so dass $\lim_{\nu\to\infty} \|f(x) - f_\nu(x)\|_{L^1} = 0$. Darüber hinaus, existiert eine Teilfolge $f_{\nu_k}(x)$ so dass $\lim_{k\to\infty} f_{\nu_k}(x) = f(x)$ fast überall.

Beweis. Wähle eine Folge von Indizes $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$ so dass $\|f_\nu(x) - f_{\nu_k}(x)\|_{L^1} \leqslant 2^{-k}$ für jedes $\nu \geqslant \nu_k$. Die Existenz einer solchen Folge folgt direkt aus der Cauchy-Bedingung. Insbesondere, $\|f_{\nu_{k+1}}(x) - f_{\nu_k}(x)\|_{L^1} \leqslant 2^{-k}$ Setze $g_k(x) := |f_{\nu_{k+1}}(x) - f_{\nu_k}(x)|$. Dann $g_k(x)$ sind nicht-negativ und $\int g_k(x)d^nx = \|f_{\nu_{k+1}}(x) - f_{\nu_k}(x)\|_{L^1} \leqslant 2^{-k}$. Deshalb konvergiert die Zahlenreihe $\sum_k \int g_k(x)d^nx$. Nach dem Satz von Levi konvergiert die Funktionsreihe $\sum_k g_k(x)$ in fast jedem Punkt x zu einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $g(x)$ mit $\int g(x)d^nx = \sum_k \int g_k(x)d^nx$.
Es sei N die Menge von solchen $x \in \mathbb{R}^n$ so dass die Zahlenreihe $\sum_k g_k(x)$ divergiert. Dann ist N eine Nullmenge und für jedes $x \notin N$ konvergiert die Reihe $\sum_k (f_{\nu_{k+1}}(x) - f_{\nu_k}(x))$ nach Majorantenkriterium. Dies bedeutet, dass die Teilfolge $f_{\nu_k}(x)$ konvergiert für jedes $x \notin N$, also fast überall. Setze $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{\nu_k}(x)$ für $x \notin N$ und $f(x) = 0$ für $x \in N$. Dabei $|f(x) - f_{\nu_k}(x)| \leqslant \sum_{l=k}^\infty |f_{\nu_{l+1}}(x) - f_{\nu_l}(x)| \leqslant \sum_{l=k}^\infty |g_l(x)|$ für fast jedes x und damit $\|f(x) - f_{\nu_k}(x)\|^*_{L^1} \leqslant \sum_{l=k}^\infty \int g_l(x)d^nx \longrightarrow 0$ für $k \longrightarrow \infty$. Für $\forall\varepsilon > 0$ existiert k_0 so dass $\|f(x) - f_{\nu_k}(x)\|^*_{L^1} \leqslant \varepsilon 2$ für alle $k \geqslant k_0$. Da $f_{\nu_k}(x)$ integrierbar sind, für $\forall\varepsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen $\varphi(x)$ mit $\|\varphi(x) - f_{\nu_k}(x)\|^*_{L^1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Für solche $f_{\nu_k}(x)$ und $\varphi(x)$ gilt $\|\varphi(x) - f(x)\|^*_{L^1} \leqslant \varepsilon$ nach der Dreiecksungleichung. Also ist $f(x)$ integrierbar. Die Abschätzung $\|f(x) - f_{\nu_1}(x)\|^*_{L^1} \leqslant \sum_{l=1}^\infty \int g_l(x)d^nx < \varepsilon$ gilt für jedes ν_1 groß genug, deshalb gilt die Normkonvergenz $\lim_{\nu\to\infty} \|f(x) - f_\nu(x)\|_{L^1} = 0$. $\square$

Notation

Die Menge aller messbaren Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ wird mit $\mathscr{M}ess(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet, die Menge aller Nullmengen mit $\mathscr{M}ess_0(\mathbb{R}^n)$.

Satz 2.8 (Eigenschaften messbarer Mengen)

(M1) *A, B messbar $\Rightarrow A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ und $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ auch messbar;*

(M2) *A, B messbar und disjunkt $\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;*

(M3) *$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ sind messbar $\Rightarrow \cup_j A_j$ auch messbar und $\mu(A) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$;*

(M4) *offene und abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind messbar:*

Beweis. Hilfssatz. Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei reellwertige Treppenfunktionen. Dann existieren Treppenfuntionen $\theta_+(x), \theta_\bullet(x), \theta^*(x)$ und $\theta_*(x)$ so dass $\theta_+(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $\theta_\bullet(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$, $\theta^*(x) = \max(\varphi(x), \psi(x))$ und $\theta_*(x) = \min(\varphi(x), \psi(x))$ fast überall.

Beweis des Hilfssatzes. Es seien $\varphi(x) = \sum_i c'_i \chi_{Q'_i}$ und $\psi(x) = \sum_j c''_j \chi_{Q''_j}$ die Darstellungen von den Treppenfuntionen. Definiere $Q_{ij} := Q'_i \cap Q''_j$ in dem Fall wenn $Q'_i \cap Q''_j$ innere Punkte hat und $Q_{ij} := \varnothing$ sonst. Dann ist $\chi_{Q'_i}(x) - \sum_j \chi_{Q'_i \cap Q''_j}(x)$ nicht Null nur für x aus der Randmengen von Q'_i und Q''_j (warum?). Deshalb $\chi_{Q'_i}(x) = \sum_j \chi_{Q_{ij}}(x)$ für fast alle x. Setze $\tilde{\varphi}(x) := \sum_{ij} c'_i \chi_{Q_{ij}}(x)$ und $\tilde{\psi}(x) := \sum_{ij} c''_j \chi_{Q_{ij}}(x)$. Dann sind $\tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x)$ auch Treppenfuktionen, und $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ und $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$ gilt fast überall.

Offensichtlich $\tilde{\varphi}(x)+\tilde{\psi}(x)=\sum_{ij}(c_i'+c_j'')\chi_{Q_{ij}}(x)$ ist eine Treppenfuktion. Außerderm gilt $\max(\tilde{\varphi}(x),\tilde{\psi}(x))=\sum_{ij}\max(c_i',c_j'')\chi_{Q_{ij}}(x)$ in jedem *inneren* Punkt jedes Quaders Q_{ij} und außerhalb der Vereinigung $\cup_{ij}Q_{ij}$, und deshalb gilt dies fast überall. Der Fall $\min(\varphi(x),\psi(x))$ wird ähnlich behandelt. Beweisende des Hilfssatzes. □

Beweis des Teils (M1). Für jede zwei Teilmengen $A,B\subset\mathbb{R}^n$ gilt: $\chi_{A\cup B}(x)=\max(\chi_A(x),\chi_B(x))$. Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Treppenfuktionen mit $\|\chi_A-\varphi\|^*_{L^1}\leqslant\varepsilon$ und $\|\chi_B-\psi\|^*_{L^1}\leqslant\varepsilon$. Dann $\|\chi_{A\cup B}-\max(\varphi,\psi)\|^*_{L^1}\leqslant\|\chi_A-\varphi\|^*_{L^1}+\|\chi_B-\psi\|^*_{L^1}\leqslant 2\varepsilon$. Nach dem Hilfssatz oben und dem Modifikationssatz kann man $\max(\varphi,\psi)$ durch eine Treppenfunktion θ^* ersetzen, so dass $\|\chi_{A\cup B}-\theta^*\|^*_{L^1}\leqslant 2\varepsilon$. Da $\varepsilon>0$ beliebig war, ist $A\cup B$ messbar. Die restlichen Eigenschaften können ähnlich bewiesen werden, wobei man die folgenden Relationen benutzt: $\chi_{A\cap B}(x)=\min(\chi_A(x),\chi_B(x))$, $\chi_{A\setminus B}(x)=\chi_A(x)-\chi_{A\cap B}(x)$ und $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_{A\setminus B}(x)+\chi_{B\setminus A}(x)$. □

Teil (M2). $A,B\subset\mathbb{R}^n$ sind disjunkt und messbar $\Rightarrow$ $\max(\chi_A,\chi_B)=\chi_A+\chi_B$ ist L-integrierbar und $\mu(A\cup B)=\int\chi_{A\cup B}d^nx=\int(\chi_A+\chi_B)d^nx=\int\chi_A d^nx+\int\chi_B d^nx=\mu(A)+\mu(B)$. □

Teil (M3). Dies folgt direkt aus dem Satz von Levi wenn man setzt $f_i:=\chi_{A_i}$.

Teil (M4). Für jede offene Teilmenge $U\subset\mathbb{R}^n$ existiert eine Zerlegung $U=\cup_i Q_i$ in nicht Überlappende Quader. Dabei $\chi_U=\sum_i\chi_{Q_i}$ fast überall. Also ist χ_U sogar eine Treppenfunktion. Endliche Vereinigungen dieser Quader sind beschränkte messbare Mengen. Also ist jede $U\subset\mathbb{R}^n$ messbar. Eine abgeschlossene Teilmenge $A\subset\mathbb{R}^n$ ist messbar als der Komplement einer offenen Teilmenge $U\subset\mathbb{R}^n$, genau gesagt $U=\mathbb{R}^n\setminus A$.

Nachtrag: Metrische Räume, Vollständigkeit

Eine **Abstandsfunktion** auf eine Menge X ist eine Abbildung $d_X : XX \to \mathbb{R}$, s.d.

(d1) $d_X(x,y) \geqslant 0$, $d_X(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (**Positivität**);

(d2) $d_X(x,y) = d_X(y,x)$ (**Symmetrie**);

(d3) $d_X(x,z) \leqslant d_X(x,y) + d_X(y,z)$ (**Dreiecksungleichung**).

Ein **metrischer Raum** ist eine Menge X versehen mit einer Abstandsfunktion. **Notation:** (X, d_X) oder einfach X (wenn d_X klar aus dem Kontext ist).

Eine **Isometrie** zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) ist eine Bijektion $f : X \to Y$ mit $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$.

Eine Folge x_n in einem metrischen Raum (X, d_X) ist eine **Cauchy-Folge** $:\Leftrightarrow$ $\big(\lim_{m,n\to\infty} d_X(x_m, x_n) = 0\big) \Leftrightarrow \big(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall m, n > n_0\ d_X(x_m, x_n) < \varepsilon\big)$.

Eine Folge x_n in einem metrischen Raum (X, d_X) **konvergiert** zu einem $x^* \in X$ $:\Leftrightarrow$ $\big(\lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x^*) = 0\big)$. $x^* \in X$ heißt der **Grenzwert** von x_n. **Tatsache:** Grezwert ist eindeutig.

Ein metrischer Raum (X, d_X) ist **vollständig** (bzgl. d_X) $:\Leftrightarrow$ jede Cauchy-Folge hat einen Grenzwert.

Vervollständigungssatz

Für jeden metrischen Raum (X, d_X) existiert ein metrischer Raum $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ – die **Vervollständigung** von X bzgl. d_X, so dass

(V1) $X \subset \widetilde{X}$ und $d_{\widetilde{X}} = d_X$ auf X;

(V2) X ist dicht in $\widetilde{X}$;

(V3) $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ ist vollständig.

Darüber hinaus ist eine Vervollständigung eindeutig bis auf Isometrie.

Definition 2.9 (Normierte und Banachräume)

Eine **Norm** *auf einem Vektorraum* V *(reell oder komplex) ist eine Funktion* $v \in V \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$ *so dass:*

(n1) $\|v\| \geqslant 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ *(***Positivität***);*

(n2) $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$ *(***Homogenität***);*

(n3) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ *(***Dreiecksungleichung***).*

Ein **normierter Vektorraum** *ist ein VRaum versehen mit einer Norm.*
Notation: $\|\cdot\|_V$ *für die Norm,* $(V, \|\cdot\|_V)$ *für den normierten VRaum.*

Jede Norm ist induziert die Metrik $d_{\|\cdot\|}(v, w) := \|v - w\|$.

Ein **Banachraum** *ist ein normierter Vektorraum* $(V, \|\cdot\|_V)$ *vollstandig bzgl. der Norm (d.h., bzgl. der induzierten Metrik).*

Eine **Halbnorm** *(auch* **Seminorm***) auf einem Vektorraum* V *(reell oder komplex) ist eine Funktion* $v \in V \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$ *mit Eigenschaften (n2–n3) und mit der geschwächter Eigenschaft*

(n1') $\|v\| \geqslant 0$ *(***Halb-** *oder* **Semipositivität***).*

Ein **(linearer) Operator** *zwischen Banach-Räumen* X *und* Y *ist eine lineare Abbildung* $A : X \to Y$ *von* X *nach* Y*, so dass* $A(av + bw) = aA(v) + bA(w)$ *für* $v, w \in X$ *und* $a, b \in \mathbb{C}$ *(bzw.* $a, b \in \mathbb{R}$*). Ein solcher Operator* $A : X \to Y$ *ist* **beschränkt** *falls* $\exists C > 0$ *so dass,* $\|Av\|_Y \leqslant C \cdot \|v\|_X$*. Die* **(Operator)-Norm** *eines beschränkten Operators* $A : X \to Y$ *ist* $\|A\|_{\mathrm{op}} := \sup\left\{\frac{\|Av\|_Y}{\|v\|_X},\ x \neq 0 \in X\right\}$.

Tatsache. Ein linearer Operator $A : X \to Y$ ist beschränkt gdw. er *stetig* als Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y ist.

Definition 2.10 (Hermitesches Skalarprodukt)

Ein **Skalarprodukt** *auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung*
$\langle\cdot,\cdot\rangle : V V \longrightarrow \mathbb{R}$ *so dass*
(Sk1) $\langle a_1 v_1 + a_2 v_2, w\rangle = a_1\langle v_1, w\rangle + a_2\langle v_2, w\rangle$ *für* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *und* $v_1, v_2, w \in V$*;*
(Sk2) $\langle w, v\rangle = \langle v, w\rangle$ *(***Symmetrie***);*
(Sk3) $\langle v, v\rangle \geqslant 0$ *und* $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \in V$ *(***Positivität***).*
Ein **Hermitesches Skalarprodukt** *auf einem kplxen Vektorraum V ist eine Abbildung*
$\langle\cdot,\cdot\rangle : V V \longrightarrow \mathbb{C}$ *so dass*
(SkH1) $\langle a_1 v_1 + a_2 v_2, w\rangle = a_1\langle v_1, w\rangle + a_2\langle v_2, w\rangle$ *für* $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ *und* $v_1, v_2, w \in V$*;*
(Sk2H) $\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle}$ *(***Hermitesche Symmetrie***);*
(SkH3) $\langle v, v\rangle \geqslant 0$ *und* $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \in V$ *(***Positivität** *).*

Lemma 2.9 (Skalarprodukt $\Rightarrow$ Norm)

Jedes (Hermitesches) Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf einem reellen (komplexen) Vektorraum indiziert eine Norm mit $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Definition 2.11 (Hilberträume)

Ein **Prähilbertraum** *ist ein Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt.*
Ein **Hilbertraum** *ist ein Prähilbertraum vollständig bzgl. der induzirten Norm.*

Reelle Zahlen.
Basisbegriff: Ganze Zahlen $n \in \mathbb{Z}$.
Einfache Operationen: $+$, $-$, $\cdot$, $/$
$\Longrightarrow$ Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$.
Vervollständigung $\Longrightarrow$ Reelle Zahlen $\mathbb{R}$.
Darstellung: $x \in \mathbb{R}$ als unendlicher Dezimalbruch, (fast) eindeutich.
Satz: $\mathbb{R}$ *(gegeben durch Dezimalbrüche) ist vollständig.*

Satz: *Monotone beschränkte Folge konvergiert.*
Satz: *Beschränkte Folge hat konvergente Teilfolge.*

Lebesgue-Integration.
Basisbegriff: Quader $Q = [a_1, b_1] \cdots [a_n, b_n]$.
Einfache Operationen: Charakteristische Funktionen, Treppenfunktionen $\Longrightarrow$ Integral von Treppenfuntionen.
Vervollstaändigung $\Longrightarrow$ Lebesgue-Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$.
Darstellung: L-integrierbare Funktionen $f(x)$, eindeutig bis auf Nullmengen.
Riesz-Fischer Satz: $L^1(\mathbb{R}^n)$, *gegeben durch Lebesgue-Klassen von integrierbaren Funktionen, ist vollständig.*
Levi-Satz: *Monotone beschränkte Funktionsfolge konvergiert.*
Lebesgue-Satz: *Beschränkte Funktionsfolge hat konvergente Teilfolge.* (Wird unten bewiesen.)

Satz 2.10 (Satz von Lebesgues über majorierte Konvergenz)

Es sei $f_k(x)$ eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen, die fast überall zu einer Funktion $f(x)$ konvergiert. Es gebe eine gemeisame Majorante $F(x)$ von $f_k(x)$, so dass $|f_k(x)| \leqslant F(x)$. Dann ist $f(x)$ auch Lebesgue-integrierbar und $\int f(x) d^n x = \lim_{k \longrightarrow \infty} \int f_k(x) d^n x$.

Beweis. Falls $f(x), f_k(x)$ sind $\mathbb{C}$- oder vektorwertig betrachte Komponenten von $f_k(x)$ (bzw. den Reell- und Imaginärteil). Also OEdA sind alle Funktionen reell.
Bilde Folgen $g_{k,\nu}(x) := \max(f_k(x), \ldots, f_{k+\nu})$. Dann für jedes k fest ist die Funktionsfolge $g_{k,\nu}(x)$ monoton wachsend und majoriert durch $F(x)$. Nach dem Satz von Levi für $\nu \longrightarrow \infty$ konvergiert jede Folge $g_{k,\nu}(x)$ fast überall zu einer integrierbaren Funktion $g_k(x) = \sup_{\nu \geqslant k}(f_\nu(x))$. Die Folge $g_k(x)$ ist monoton fallend, majoriert durch $F(x)$, und kovergiert fast überall zu $f(x)$. Also ist $f(x)$ integrierbar. Das gleiche gilt für $g_k^* := \inf_{\nu \geqslant k}(f_\nu(x))$. Der Satz folgt aus der Ungleichung $g_k^* \leqslant f(x) \leqslant g_k(x)$. □

III. Maßtheorie[1]

Definition 3.1 (σ-Algebra)

*Es sei X eine Menge. Eine σ-**Algebra** auf X ist eine Kollektion $\mathcal{A}$ von Teilmengen A von X so dass*

(sA1) *X und $\varnothing$ gehören zu $\mathcal{A}$;*

(sA2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \Delta B \in A$;

(sA3) *$A_1 \subset A_2 \subset \dots$ gehören zu $\mathcal{A} \Rightarrow \cup_i A_i \in \mathcal{A}$.*

*Mengen $A \in \mathcal{A}$ heißen $\mathcal{A}$-**messbar.***
*Es sei $\mathcal{K}$ eine Kollektion von Teilmengen K von X. Die σ-**Algebra erzeugt von** $\mathcal{K}$ ist die kleinste σ-Algebra $\sigma[\mathcal{K}]$ so dass jedes $K \in \mathcal{K}$ zu $\mathcal{A}$ gehört.*

Behauptung. *$\sigma[\mathcal{K}]$ ist wohl-definiert.*

Hauptbeispiel. Die σ-Algebra $\mathscr{Mess}(\mathbb{R}^n)$ von Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. $\mathscr{Mess}(\mathbb{R}^n)$ ist erzeugt von (i) allen Quadern und (ii) allen Nullmengen. Anstatt Quadern kann man auch nehmen: Alle Bälle oder alle Würfel, oder alle offene Mengen, oder alle geschlossene Mengen.

Definition 3.2 (Borel-Algebra)

*Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Die **Borel-Algebra** $\mathcal{B}(X)$ ist die σ-Algebra erzeugt von allen offenen Teilmengen von X.*

[1] Referenz: Fischer/Kaul, Mathematik für Physiker 2, § 19

Definition 3.3 (Maß)

Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Ein **Maß** *μ auf $\mathcal{A}$ ist eine Zuordnung ($\Leftrightarrow$ Funktion) $A \in \mathcal{A} \mapsto \mu(A) \in [0, +\infty]$ mit folgenden Eigenschaften:*

(mu1) $\mu(\varnothing) = 0$, $A \subset B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$ (**Monotonie**);

(mu2) $A, B \in \mathcal{A}$ *disjunkt* $\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (**Additivität**);

(mu3) $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ *gehören zu* $\mathcal{A} \Rightarrow \mu(\cup_i A_i) = \lim_{i \longrightarrow \infty} \mu(A_i)$ (**Kontinuität**);

(mu3') $B_1, B_2, B_3, \dots \in \mathcal{A}$ *paarweise disjunkt* $\Rightarrow \mu(\sqcup_i B_i) = \sum_i \mu(B_i)$ (σ-**Additivität**);

Ein **Borel-Maß** *auf einem metrischen Raum (X, d_X) ist ein Maß auf dem Borel-Algebra $\mathcal{B}(X)$.*

Äquivalenz (mu3) $\Leftrightarrow$ (mu3'): Teil $\Rightarrow$: Setze $B_i := A_i \setminus A_{i-1}$ (und $B_1 := A_1$)
Teil $\Leftarrow$: Setze $A_i := \cup_{j=1}^{i} B_i$.

Notation. Das Lebesgue-Maß wird ab jetzt mit μ_L oder μ_{Leb} bezeichnet, um von einem allgemeinen Maß zu unterscheiden.

Beispiele. 1. Hauptbeispiel. Das Lebesgue-Maß μ_{Leb} auf σ-Algebra $\mathscr{Mess}(\mathbb{R}^n)$. Die Einschränkung von μ_{Leb} auf die Borelsche-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Borel-Maß.

2. Es sei $X = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$, $\mathcal{A}$ alle Teilmengen $A \subset X$, und $\nu(A) = |A|$ (**Kardinalität** $\Leftrightarrow$ Anzahl von Elementen).

3. Es sei $X = S^2$ eine Sphäre (Erdekugel) und $\mu(A)$ die Oberfläche des Erdestücks A.

Definition 3.4 (Integration bezüglich eines Maßes)

Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf eine Menge X und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$.

Treppenfunktionen: *Abzählbare Summen $\varphi(x) = \sum_i c_i \chi_{A_i}$ mit disjunkten Mengen $A_i \in \mathcal{A}$.*

Wichtig! Ab jetzt: *Treppenfunktionen sind in Sinne der letzten Definition, also $\varphi(x) = \sum_i c_i \chi_{A_i}$ mit A_i messbar beliebig und paarweise disjunkt.*

Integration von Treppenfunktionen: $\int \varphi(x) d\mu(x) := \sum_i c_i \mu(A_i)$ *falls die Reihe absolut konvergiert, oder in dem Fall $c_i \geqslant 0$.*

Treppenmajoranten: *$f(x)$ auf X beliebig, $\varphi(x) \geqslant |f(x)|$ eine Treppenfunktion;*

Das obere L^1-Norm: $\|f(x)\|^*_{L^1(\mu)} := \inf\left(\int \varphi(x) d\mu(x)\right)$ *über alle Treppenmajoranten $\varphi(x)$ von $f(x)$;*

μ-messbare Funktionen: *$f(x)$ ist messbar $:\Leftrightarrow \exists$ eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k(x)$ mit $\|\varphi_k(x)\|_{L^1(\mu)} < +\infty$ so dass $\|f(x) - \varphi_k(x)\|^*_{L^1(\mu)} \longrightarrow 0$;*

Obere μ-Maß von Mengen: $\mu^*(M) := \|\chi_M\|^*_{L^1(\mu)}$.

Nullmengen: *N ist eine μ-Nullmenge $:\Leftrightarrow \mu^*(N) = 0$;*

Charakterisierung von Nullmengen: *$\mu^*(N) = 0 \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ und $M \subset A$.*

μ-messbare Mengen: *$M \subset X$ ist messbar $:\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A}$ mit $\mu^*(M \Delta A) = 0$.*

Lebesguesche L^1-Raum: *$\mathscr{L}^1(X,\mu) := \{f(x)$ ist μ-itegrierbar$\}$, $\mathcal{N}(X,\mu) := \{f(x) \,:\, \|f(x)\|^*_{L^1(\mu)} = 0\}$; $L^1(X,\mu) := \mathscr{L}^1(X,\mu)/\mathcal{N}(X,\mu)$.*

Prinzip. Alle Eigenschaften vom Lebesgue-Maß gelten auch für allemeine Maße, insbesondere die Sätze von Levi, Lebesgue, Riesz-Fischer, und der Modifikationssatz.

Beispiele. 1. μ_1, μ_2 sind Maße auf $\mathcal{A} \Rightarrow \mu := \mu_1 + \mu_2$ (mit $\mu(A) := \mu_1(A) + \mu_2(A)$) auch ein Maß.

2. Es sei $Y \in \mathcal{A}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Menge. Setze $\mathcal{A}|_Y := \{A \in \mathcal{A} \; : \; B \subset Y\}$. Es sei μ ein Maß auf $\mathcal{A}|_Y$. Die **triviale Fortsetzung** (**Fortsetzung mit 0**) ist $\tilde{\mu}(A) := \mu(A \cap Y)$.

3. Es sei $B \in \mathcal{A}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Menge und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Für $A \in \mathcal{A}$ setze $\mu|_B(A) := \mu(A \cap B)$. Dies ist ein Maß auf B, das **Einschränkung** (oder **Restriktion**) des Maßes μ auf B heißt.

Definition 3.5 (Integration über Teilmengen)

Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X und $B \subset X$ eine μ-messbare Menge. Das Integral $\int_B f(x) d\mu(x)$ einer Funktion $f(x)$ auf B ist das Integral bzgl. des eingeschränkten Maßes μ_B, $\int_B f(x) d\mu(x) := \int_B f(x) d\mu|_B(x)$

Lemma 3.1 (Dichten)

Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und $\rho(x) \geqslant 0$ eine Funktion so dass $X = \cup_i X_i$ für eine monoton wachsende Folge $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ von messbaren Teilmengen mit ρ integrierbar auf jedem X_i. Dann ist die Zuordnung $A \in \mathcal{A} \mapsto \|\rho(x)\chi_A\|^*_{L^1(X,\mu)} \in [0, +\infty]$ auch ein Maß auf $\mathcal{A}$.

Notation. $\nu := \int \rho d\mu$.

Standard-Beispiel: $X = \mathbb{R}^n$ ist die Vereinigung von Bällen $B(0, R_i)$ von wachsenden Radii $R_i \longrightarrow \infty$.

Beweis. Da $\|\rho(x)\chi_A\|^*_{L^1(X,\mu)} \in [0,+\infty]$ wohl-definiert ist, muss man folgendes zeigen: (ii) Additivität von $\nu = \int \rho d\mu$ (iii) Kontinuität ($\Leftrightarrow$ σ-Additivität) (siehe Eigenschaften (mu1–mu3) oben).
Aus der Identität $\chi_A{\cdot}\chi_B = \chi_{A\cap B}$ folgt, dass ein Produkt einer Treppenfunktion $\varphi(x)$ (in Sinne der Definition 3.4) mit der charakteristischen Funktion einer Menge $A \in \mathcal{A}$ ist eine Treppenfunktion. Außerdem für jede Funktion $f(x)$ gilt: $\|f(x){\cdot}\chi_A\|^*_{L^1(\mu)} \leqslant \|f(x)\|^*_{L^1(\mu)}$.
Dies impliziert: $f(x) \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$, $A \in \mathcal{A} \Rightarrow f(x){\cdot}\chi_A \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ mit der Norm-Ungleichung $\|f(x){\cdot}\chi_A\|_{L^1(\mu)} \leqslant \|f(x)\|_{L^1(\mu)}$.

Hilfssatz. Für jedes $A \in \mathcal{A}$ messbar, gilt: $\|\rho(x)\chi_A\|^*_{L^1(X,\mu)} = \lim\limits_{i\longrightarrow\infty} \int_{X_i} \rho(x)\chi_A d\mu(x)$.

Beweis. Für jedes X_i gilt: $A \cap X_i$ ist auch messbar und $\int_{X_i} \rho(x)\chi_A d\mu(x) \leqslant$ $\leqslant \int_{X_i} \rho(x) d\mu(x) < +\infty$. Ist die Folge $\int_{X_i} \rho(x)\chi_A d\mu(x)$ beschränkt, dann schreibt man $\int_{X_i} \rho(x)\chi_A d\mu(x) = \int \rho(x)\chi_A\chi_{X_i} d\mu(x) = \int \rho(x)\chi_{A\cap X_i} d\mu(x)$ und benutzt den Satz von Levi für die Funktionsfolge $f_i(x) := \rho(x)\chi_A\chi_{X_i}$. Diese Folge konvergiert punktweise zu $\rho(x)\chi_A$ und nach dem Satz ist $\rho(x)\chi_A$ μ-integrierbar mit $\lim\limits_{i\longrightarrow\infty} \int_{X_i} \rho(x)\chi_A d\mu(x) = \int \rho(x)\chi_A d\mu(x)$.
Anderseits, ist die Folge $\int_{X_i} \rho(x)\chi_A d\mu(x)$ *nicht* beschränkt, dann hat $\rho(x)\chi_A$ keine Treppenmajorante $\varphi(x)$ mit $\int \varphi(x) d\mu(x) < \infty$ (da jede solche Majorante $\varphi(x)$ auch eine Majorante für alle $\rho(x)\chi_A\chi_{X_i}$ sein muss) und damit $\|\rho(x)\chi_A\|^*_{L^1(X,\mu)} = +\infty =$ $= \lim\limits_{i\longrightarrow\infty} \int_{X_i} \rho(x)\chi_A d\mu(x)$ auch in diesem Fall. □

Nun sei $A, B \in \mathcal{A}$ messbar und disjunkt. Dann $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ und damit
$\|\rho(x)\chi_{A\cup B}\|^*_{L^1(X,\mu)} = \lim \int_{X_i} \rho(x)\chi_{A\cup B} d\mu(x) =$
$\lim \int_{X_i} \rho(x)\chi_A d\mu(x) + \lim \int_{X_i} \rho(x)\chi_B d\mu(x) = \|\rho(x)\chi_A\|^*_{L^1(X,\mu)} + \|\rho(x)\chi_B\|^*_{L^1(X,\mu)}$.
Ferner, für $B_j \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $Y_i := X_i \backslash X_{i-1}$ gilt: Y_i sind messbar und paarweise disjunkt, und außerdem $B := \cup_j B_j = \cup_{ij}(Y_i \cap B_j)$. Ähnlich wie oben zeigt man die Gleichheit $\|\rho(x)\chi_B\|^*_{L^1(X,\mu)} = \sum_{ij} \int \rho(x)\chi_{Y_i\cap B_j} d\mu(x) = \sum_j \int \rho(x)\chi_{B_j} d\mu(x)$.
Dies beweist die σ-Additivität von $\|\rho(x)\chi_A\|^*_{L^1(X,\mu)}$. □

Satz 3.2 (Stetigkeit von Integration)

Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, $f(x) \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$, und $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots \in \mathcal{A}$ eine Folge mit $\cup_i A_i = X$. Dann $\int f(x) d\mu(x) = \lim_{i\longrightarrow\infty} \int f(x)\cdot\chi_{A_i} d\mu(x)$.

Beweis. Benutze den Satz von Lebesgue mit $f_i(x) := f(x)\cdot\chi_{A_i}$ und $F(x) := |f(x)|$. □

Definition 3.6 (Produkt zweier Maße)

Es sei X, Y zwei Mengen, $\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y$ σ-Algebren auf X, Y, und μ_X, μ_Y Maße auf $\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y$. Es sei $Z := X \times Y$ das kartesische Produkt. Man definiere das **Produkt von σ-Algebren** *$\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$ als die σ-Algebra auf $Z = X \times Y$ erzeugt von allen Produktmengen $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}_X, B \in \mathcal{A}_Y$, und das* **Produkt von Maßen** *$\mu_Z := \mu_X \otimes \mu_Y$ durch die Relation $\mu_X \otimes \mu_Y(A \times B) := \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B)$ auf Produktmengen, und durch Eigenschaften (mu1–mu3) für allemeine Mengen $C \in \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$.*

Beispiel. Die Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist erzeugt von Quadern, deshalb $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Für die σ-Algebra aller Lebesgue-messbaren Mengen $\mathscr{Mess}(\mathbb{R}^n)$ gilt eine solche Eigenschaft nicht.
Für das Lebesgue-Maß auf Borel-Algebren gilt: $\mu_{\mathbb{R}^m} \otimes \mu_{\mathbb{R}^n} = \mu_{\mathbb{R}^{m+n}}$.

Satz 3.3 (Der Satz von Fubini)

Es seien X, Y, $\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y$, und μ_X, μ_Y wie oben und $\nu := \mu_X \otimes \mu_Y$ das Produkt des Maßes μ_X, μ_Y. Ferner sei $f(x,y)$ eine ν-messbare Funktion. Dann gilt:

- *für fast jedes $y \in Y$ (bzgl. μ_y) ist die Funktions $f(x,y)$ μ_X-integrierbar ;*
- *die Funktion $F(y) := \int_X f(x,y) d\mu_X$ ist μ_Y–integrierbar;*
- *es gilt: $\int_{X \times Y} f(x,y) d\nu(x,y) = \int_Y (\int_X f(x,y) d\mu_X) d\mu_Y$.*

Bemerkung. Man setze $F(y) := 0$ für solche $y \in Y$, wo $f(x,y)$ nicht μ_X-integrierbar ist. Menge solcher y ist eine μ_Y-Nullmenge.

Beispiele. 1. Speziell in $\mathbb{R}^2$: $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\mu_{Leb}(x,y) = \iint f(x,y)dx\,dy = \iint f(x,y)dy\,dx$.

2. Es sei $A \subset X \times Y$ eine messbare Teilmenge. Man definiere die **Schnittschicht** durch $A_y := \{x \in X \,:\, (x,y) \in A\}$. Dann für das $\nu(A) = \int_Y \mu_X(A_y)d\mu_Y$.

Folgerung: Cavalieri-Prinzip

Es sei $A', A'' \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ zwei messbare Mengen („Körper") so dass $\mathrm{Vol}_m(A'_y) = \mathrm{Vol}_m(A''_y)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$. Dann haben A', A'' gleiche $(m+n)$-Volumina.

Beweis des Satzes. Schritt 1. Es sei $f(x,y)$ integrierbar bzgl. $\nu = \mu_X \otimes \mu_Y$. Approximiere $f(x,y)$ mit einer Folge von Treppenfunktionen $f_i(x,y) = \sum_j c_{i,j}\chi_{C_{i,j}}$ mit $C_{i,j} \in \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$ bezüglich $L^1(\nu)$-Norm. Durch das „Abschneiden" von jeder Summe $\sum_j c_{i,j}\chi_{C_{i,j}}$ des Restes mit $j \geqslant j_0(i)$ mache ich jede Summe $f_i(x,y) = \sum_j c_{i,j}\chi_{C_{i,j}}$ endlich und so dass $f_i(x,y)$ weiterhin $f(x,y)$ approximieren.

Schritt 2. Hilfssatz. Jede Menge $C \in \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$ kann durch eine Folge von $C_k \in \mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$ approximiert werden, so dass $\nu(C \Delta C_k) \longrightarrow 0$ und so dass jede Menge C_i ist eine endliche Vereinigung von paarweise disjunkten Produktmengen $C_k = \cup_l (A_{k,l} \times B_{k,l})$.

Beweis des Hilfssatzes. Die σ-Algebra $\mathcal{A}_X \otimes \mathcal{A}_Y$ wird durch die folgenden Operationen erzeugt: Endliche algebraische Mengenoperationen $\cup, \cap, \Delta$ und abzählbare Vereinigung. Man überprüfe, dass jede durch diese Operationen entstehende Menge C eine Approximation wie oben zulässt, solange die in die Operationen eingezogenen Mengen diese Eigenschaft auch haben.

Schritt 3. Benutze Schritt 2 um zu eine Approximation von $f(x,y)$ durch Treppenfunktionen $f_i(x,y)$ zu finden, so dass jede $f_i(x,y)$ ist eine endliche Summe $f_i(x,y) = \sum_j c_{i,j}\chi_{A_{i,j} \times B_{i,j}}$.

Schritt 4. Man überprüfe den Satz von Fubini für endliche Summen $f_i(x,y) = \sum_j c_{i,j}\chi_{A_{i,j}\times B_{i,j}}$.

Schritt 5. Man zeige, dass $F_i(y) := \int_X f_i(x,y)d\mu_X$ eine $L_1(Y,\mu_Y)$-Cauchy-Folge ist. Insbesondere konvergiert die Folge $F_i(y)$ fast überall zu einer messbaren Funktion $\tilde{F}(y)$ fast überall und es gilt $\lim \int F_i(y)d\mu_Y = \int F(y)d\mu_Y$.

Schritt 6. Man wendet den Schritt 5 zu der Doppelfolge $|f_i(x,y) - f_j(x,y)|$ und zeigt, dass $\|f_i(x,y) - f_j(x,y)\|_{L^1(X,\mu_X)} = \int |f_i(x,y) - f_j(x,y)|d\mu_X$ konvergiert zu 0 für fast alle $y \in Y$. Deshalb für fast alle $y \in Y$ ist die Folge $f_i(x,y)$ eine $L_1(X,\mu_X)$-Cauchy-Folge die fast überall zu einer Funktion $\tilde{f}(x,y)$ konvergiert. Deshalb $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$ für eine Menge $N \subset X \times M$ für eine μ_Y-Nullmenge M. Außerdem $F(y) := \int_X \tilde{f}(x,y)d\mu_X$ für fast alle $y \in Y$.

Schritt 7. Man zeigt, dass die Konvergenz $f_i(x,y) \longrightarrow \tilde{f}(x,y)$ fast überall in $X \times Y$ gilt, weil $f_i(x,y)$ eine Cauchy-Folge bzgl. $L^1(X \times Y,\nu)$ ist.
Ende des Beweises. $\square$

Definition 3.7 (Diskrete, absolut stetige und singuläre Maße)

Es seien μ, ν Maße auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf einer Menge X.

- *μ heißt σ-**endlich** falls $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$ mit X_i paarweise disjunkt, μ-messbar und mit $\mu(X_i) < \infty$.*
- *μ heißt **diskret** falls es existiert $A \in \mathcal{A}$ endlich oder abzählbar, so dass $\mu(\{x_i\}) > 0$ für jedes $x_i \in A$ und $\mu(X \backslash A) = 0$. Die Menge A heißt der **Träger** des Maßes μ.*
- *ν heißt **absolut stetig** oder kurz **stetig** bzgl. μ oder auch **dominiert** durch μ falls für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt: $\mu(A) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(A) = 0$.*
- *ν heißt **singulär** bzgl. μ falls es eine Zerlegung $X = X_0 \sqcup X_1$ mit $X_0, X_1 \in \mathcal{A}$ und $X_0 \cap X_1 = \varnothing$ existiert, so dass $\nu(X_1) = \mu(X_0) = 0$.*

Satz 3.4 (Der Satz von Hahn)

Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X und μ, ν zwei σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}$. Dann existieren Teilmengen $X_+, X_- \subset X$ so dass

- *$X_+, X_- \in \mathcal{A}$, $X = X_+ \cup X_-$ und $X_+ \cap X_- = \varnothing$;*
- *$\nu(A) < \mu(A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subset X_-$ und $0 < \mu(A) < +\infty$;*
- *$\nu(A) \geqslant \mu(A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subset X_+$ und $\nu(A) < +\infty$.*

Die Darstellung $X = X_+ \cup X_-$ heißt **Hahn-Zerlegung**.

Satz 3.5 (Der Satz von Radon-Nikodym)

Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X und μ,ν zwei σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}$ so dass ν absolut stetig bzgl. μ ist. Dann existiert eine Darstellung $X = \cup_i X_i$ mit $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \in \mathcal{A}$ und eine Funktion $\rho(x) \geqslant 0$, μ-integrierbar auf jedem X_i, so dass $\nu(A) = \int_A \rho(x) d\mu(x)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$.

Beweis.
Schritt 1. Es seien $X = \cup_{j=1}^{\infty} X'_j$ und $X = \cup_{k=1}^{\infty} X''_k$ die Zerlegungen von X mit $\mu(X'_j) < +\infty, \nu(X''_k) < +\infty$. Dann $X = \cup_{j,k}(X'_j \cap X''_k)$ und $\mu(X'_j \cap X''_k) < +\infty, \quad \nu(X'_j \cap X''_k) < +\infty$. Falls man eine Funktion $\rho_{jk}(x)$ für jedes $X'_j \cap X''_k$ findet, die die Behauptung des Satzes erfüllt, dann erfüllen $\rho(x) := \sum_{jk} \rho_{jk} \chi_{X'_j \cap X''_k}$ und $X_i := \cup_{j,k \leqslant i}(X'_j \cap X''_k)$ die Behauptung des Satzes. Also oEdA gilt: $\mu(X) < +\infty, \nu(X) < +\infty$.

Schritt 2. Für jede rationale positive Zahl $r = \frac{p}{q}$, es sei $X = X_r^+ \sqcup X_r^-$ eine Hahn-Zerlegung bzgl. ν und $r{\cdot}\mu$. Dann für jede $r < r'$ gilt $X_r^- \backslash X_{r'}^+$ ist eine Nullmenge bzgl. $\mu + \nu$ ($\Leftrightarrow$ bzgl. μ und ν). Außerdem $\lim_{r\to+\infty} \nu(X_r^+) =$ und deshalb $\lim_{r\to+\infty} \mu(X_r^+) = 0$.

Schritt 3. Für $i = 1, 2, 3, ..$ und setze $r_{i,k} := \frac{k}{2^i}$ und

$$\rho_i(x) := \sum_{k=0}^{\infty} r_{i,k} \cdot \chi_{X^-_{r_{i,k+1}} \setminus X^-_{r_{i,k}}}.$$

Dann $|\rho_i(x) - \rho_{i+1}(x)| \leqslant \frac{1}{2^i}$ μ-fast überall und deshalb $\|\rho_i(x) - \rho_{i+1}(x)\|_{L^1(X,\mu)} \leqslant \frac{\mu(X)}{2^i}$. Deshalb ist $\rho_i(x)$ eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_{L^1(X,\mu)}$, die zu einer Funktion $\rho(x)$ μ-fast überall und bezüglich $\|\cdot\|_{L^1(X,\mu)}$ konvergiert.

Außerdem gilt: $|\nu(A) - \int_A \rho_i(x)| \leqslant \frac{\mu(X)}{2^i}$. Deshalb erfüllt $\rho(x) = \lim \rho_i(x)$ die Behauptung des Satzes. □

Satz 3.6 (Lebesguesche Zerlegungsatz)

Es sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, und μ, ν σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}$. Dann lässt sich das Maß ν in die Summe $\nu = \nu_s + \nu_c$ zerlegen, so dass ν_s singulär und ν_c absolut stetig bzgl. μ sind.

Beweis. Wie oben kann man oEdA annehmen, dass μ und ν endlich sind (d.h., $\mu(X) + \nu(X) < \infty$). Die beiden Maße ν und μ sind absolut stetig bzgl. $\lambda := \nu + \mu$. Es seien f, g die entsprechende Funktionen, so dass $\mu = \int f d\lambda$ und $\nu = \int g d\lambda$. Es seien $X_+ := \{x : f(x) > 0\}$ und $X_0 := \{x : f(x) = 0\}$. Dann X_+ und X_0 sind disjunkt und $\mu(X_0) = \int_{X_0} f d\lambda = 0$. Setze $\nu_s(A) := \nu(A \cap X_0)$. Dann ist ν_s singulär bzgl. μ. Setze Dann $\nu_c(A) := \nu(A \cap X_+)$. Dann ist ν_c ein Maß und $\nu := \nu_c + \nu_s$. Es sei nun A messbar mit $\mu(A) = 0$. Da $f(x) > 0$ auf X_+, man muss haben $\lambda(A \cap X_+) = 0$. Aber dann $\nu_c(A) = \nu(A \cap X_+) = 0$. Also ist ν_c absolut stetig bzgl. μ. □

Satz 3.7 (Diskreter Anteil eines Maßes)

Es sei X eine Mengen, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, μ ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{A}$, so dass jede 1-pünktige Menge $\{x\}$ messbar ist. Man definiere die Menge $A_d := \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}$ und das Maß μ_d auf A_d durch $\mu_d(\{x\}) := \mu(\{x\})$ $\forall x \in A_d$. Dann ist die Zuordnung $\mu' : A \in \mathcal{A} \mapsto \mu(A) - \mu_d(A)$ auch ein Maß auf $\mathcal{A}$.

Definition 3.8

Es seien X, Y Mengen, $\mathcal{A}_Y$ eine σ-Algebra auf Y, μ_Y ein Maß auf $\mathcal{A}_Y$, und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Der **Rücktransport** *von $\mathcal{A}_Y$ bzw. von μ_Y ist die σ-Algebra $f^*\mathcal{A}_Y := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}_Y\}$, bzw. das Maß $f^*\mu$ auf $f^*\mathcal{A}_Y$ mit $f^*\mu(f^{-1}(A)) := \mu(A)$.*

Satz 3.8 (Transformationssatz)

Es sei U, V offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ und $\Phi : U \to V$ eine C^1-Abbildung so dass die Umkehrung $\Phi^{-1} : V \to U$ existiert und ist auch C^1-glatt. Ferner sei λ das Lebesgue-Maß in V, $\rho(X) \geqslant 0$ eine Dichte, und $\mu = \int \rho(x) d\lambda$ das durch $\rho(x)$ definiertes Maß. Dann das Rücktransport $\Phi^*\mu$ ist absolut stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes λ und es gilt:

$$\Phi^*\mu = \int \rho(\Phi(x)) \cdot |\mathrm{det} J_\Phi| d\lambda$$

wobei J_Φ die Jacobische Matrix der Abbildung $\Phi : U \to V$ ist.

Notation. Ein **Spat** ist ein Bild eines Quaders bzgl. einer linearen Abbildung. Es seien $\mathbf{e}_i$ die Standard-Basisvektoren in $\mathbb{R}^n$. Eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heiß **Scherung** falls es existiert $1 \leqslant i \leqslant n$ so dass $F(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j$ für $j \neq i$ und $F(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i + \sum_{j \neq i} c_i \mathbf{e}_i$ mit Konstanten $c_i \in \mathbb{R}$. In anderen Wörtern, man addiert zu $\mathbf{e}_i$ einen Vektor orthogonal zu $\mathbf{e}_i$. Die Wirkung einer Scherung auf eine $n \times n$-Matrix M: Man addiert zur i-Zeile eine lineare Kombination von restlichen Zeilen (mit gleichen Koeffizienten c_i wie oben). Folgerung: $\det F = 1$ für jede Scherung.

Beweis. 1. Behauptung. Jede Scherung erhält das Volumen ($\Leftrightarrow$ das Lebesgue-Maß) jedes Quaders Q. Beweis Es reicht nur **einfache Scherungen** zu betrachten, mit $F_c(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i + c\mathbf{e}_k$ mit festen $i \neq k$ und $c \in \mathbb{R}$. Wenn c sich von einem zu anderem Wert verändert, deformiert sich jeder Quader Q in einen Spat $F_c(Q)$, aber die Niveau-Mengen $\{x_i = a\} \cap Q$ und $\{x_i = a\} \cap F_c(Q)$ bleiben dieselbe. Also nach Cavalieri-Prinzip erhält jede einfache Scherung $F_c(Q)$ das Volumen jedes Quaders. Deshalb wird das Lebesgue-Maß jeder messbaren Menge unter jeder Scherung erhalten. □

2. Spezialfall des Satzes. Φ ist linear. Man verwendet geeignete Scherungen und transformiert Φ in eine lineare Abbildung $\Phi_1 = \Phi \circ F$ (mit F Produkt von Scherungen), so dass $\Phi_1(\mathbf{e}_i) = a_i \mathbf{e}_i$. Dabei $\det F = 1$ und deshalb $\det \Phi = \det \Phi_1 = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Aber da jeder Quader Q unter der Abbildung Φ_1 in jeder Richtung gestreckt wird, $\mathrm{Vol}(\Phi(Q)) = \mathrm{Vol}(\Phi_1(Q)) = \det \Phi_1 \cdot \mathrm{Vol}(Q) = \det \Phi \cdot \mathrm{Vol}(Q)$. Dies ist die gewünschte Formel für lineare Abbildungen

3. Allgemeiner Fall. Φ ist beliebig. Wirt nachgereicht.

IV. L^p-Räume.[2]

Definition 4.1 (L^p–(Halb)norm.)

Es seien X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, und $1 < p < +\infty$ eine reelle Zahl. Die **obere L^p-Halbnorm** *einer Funktion $f(x)$ auf X (reel, komplex, oder vektorwertig) ist die Halbnorm $\|f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} := \left(\||f(x)|^p\|^*_{L^1(X,\mu)}\right)^{1/p}$.*

Triviale Eigenschaften

- $\|c \cdot f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} = |c| \cdot \|f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)}$ für $c \in \mathbb{C}$;
- $\|f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ fast überall.

Satz 4.1 (Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski)

Es seien $1 < p, q < +\infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann

- *Für jede reelle Zahlen $a, b \geqslant 0$ gilt: $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (Youngsche Ungleichung).*
- *Für jede komplexe Funktionen $f(x), g(x)$ auf X gilt:*
  $\|f(x) \cdot g(x)\|^*_{L^1(X,\mu)} \leqslant \|f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} \cdot \|g(x)\|^*_{L^q(X,\mu)}$ *(Höldersche Ungleichung).*
- *Für jede Funktionen $f(x), g(x)$ auf X gilt:*
  $\|f(x) + g(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} \leqslant \|f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} + \|g(x)\|^*_{L^q(X,\mu)}$ *(Minkowkische Ungleichung).*

[2] Rererenz: [Fo-3], § 10.

Beweis. Youngsche Ungleichung. Man legt $b \geqslant 0$ fest und such das Minimum von der Funktion $L_b(y) := \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb$. Das Minimum wird an der Stelle $x = a_*$ mit $a_*^p = b^q$ erreicht und $L_b(a_*) = 0$. Also $L_b(a) \geqslant 0$ für alle $a, b \geqslant 0$.

Höldersche Ungleichung. OEdA $0 < \|f\|^*_{L^p(X,\mu)} < +\infty$ und $0 < \|g\|^*_{L^q(X,\mu)} < +\infty$, weil sonst alles trivial ist. Setze $A := \|f\|^*_{L^p(X,\mu)}$ und $B := \|g\|^*_{L^q(X,\mu)}$.

Man betrachtet die Funktionen $\varphi(x) := \frac{|f(x)|^p}{A^p}$ und $\psi(x) := \frac{|g(x)|^q}{B^q}$. Dann $\|\varphi(x)\|^*_{L^1(X,\mu)} = \|\psi(x)\|^*_{L^1(X,\mu)} = 1$. Aber dann

$\frac{1}{A\cdot B} \cdot \|f(x)\cdot g(x)\|^*_{L^1(X,\mu)} = \|\frac{|f(x)|}{A} \cdot \frac{|g(x)|}{B}\|^*_{L^1(X,\mu)} \leqslant \|\frac{|f(x)|^p}{A^p p} + \frac{|g(x)|^q}{B^q q}\|^*_{L^1(X,\mu)}$ $\leqslant \frac{1}{p} \cdot \|\frac{|f(x)|^p}{A^p}\|^*_{L^1(X,\mu)} + \frac{1}{q} \cdot \|\frac{|g(x)|^q}{B^q}\|^*_{L^1(X,\mu)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dies bedeutet die gewünschte Ungleichung.

Minkowskische Ungleichung. Merken, dass $1 < p < +\infty$. Betrachte Funktion $h(x) := |f(x) + g(x)|^{p-1}$. Weil $q(p-1) = p$ und $p - 1 = \frac{p}{q}$, es gilt:
$h(x)^q = |f(x) + g(x)|^p$, und deshalb $\|h(x)\|^*_{L^q(X,\mu)} = \left(\|f(x) + g(x)\|^*_{L^p(X,\mu)}\right)^{p-1}$.
Außerdem $|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} = |f(x) + g(x)| \cdot h(x) \leqslant |f(x)h(x)| + |g(x)h(x)|$. Deshalb $\left(\|f(x) + g(x)\|^*_{L^p(X,\mu)}\right)^p = \||f(x) + g(x)|^p\|^*_{L^1(X,\mu)} \leqslant \||f(x)h(x)| + |g(x)h(x)|\|^*_{L^1(X,\mu)} \leqslant \|f(x)h(x)\|^*_{L^1(X,\mu)} + \|g(x)h(x)\|^*_{L^1(X,\mu)} \leqslant$
$\left(\|f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} + \|g(x)\|^*_{L^p(X,\mu)}\right) \cdot \|h(x)\|^*_{L^q(X,\mu)} =$
$\left(\|f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} + \|g(x)\|^*_{L^p(X,\mu)}\right) \cdot \left(\|f(x) + g(x)\|^*_{L^p(X,\mu)}\right)^{p-1}$. Dies impliziert die Minkowskische Ungleichung. □

Satz 4.2 (Starke Hölder-Ungleichung)

Es sei μ ein Maß auf (einer σ-Algebra auf) einem Raum X, $1 < p, q, r < +\infty$ reelle Zahlen mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ und $f(x), g(x)$ Funktionen auf X. Dann
$\|f(x) \cdot g(x)\|^*_{L^r(X,\mu)} \leqslant \|f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} \cdot \|g(x)\|^*_{L^q(X,\mu)}$.

Beweis. Setze $p' := \frac{p}{r}, q' := \frac{q}{r}$, $\varphi(x) := |f(x)|^r$ und $\psi(x) := |g(x)|^r$. Dann reduziert sich die Starke Hölder-Ungleichung zur „normalen“ (Teil 2 aus dem Satz 4.1).

Definition 4.2 (L^p-Räume)

*Eine Funktion $f(x)$ ist eine L^p-**Funktion**, $f(x) \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$, falls es eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k(x)$ existiert mit $\|\varphi_k(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} < +\infty$ und*
$\|f(x) - \varphi_k(x)\|^*_{L^p(X,\mu)} \longrightarrow 0$. Für $f(x) \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ wird $\|f(x)\|^*_{L^p(X,\mu)}$ durch
$\|f(x)\|_{L^p(X,\mu)}$ oder einfach $\|f(x)\|_{L^p}$ bezeichnet.
Der Raum $L^p(X,\mu)$ ist definiert als der Quotient $\mathscr{L}^p(X,\mu)/\mathcal{N}$.
Notation: p-integrierbare Funktionen.

Satz 4.3 (Riesz-Fischer-Satz für L^p-Räume)

Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra auf einem Raum X. Jede $\|\cdot\|_{L^p(X,\mu)}$-Cauchy-Folge von Funktionen $f_n(x) \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ konvergiert bzgl. der L^p-Norm zu einer Funktion $f(x) \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$. Darüber hinaus konvergiert $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ fast überall in X.
$\|f(x)\|_{L^p}$ ist eine Norm auf $L^p(X,\mu)$ so dass $L^p(X,\mu)$ vollständig, und damit ein Banachraum ist.

Definition 4.3 (Dualräme)

Es sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein komplexes normierter oder Banachraum. Ein beschränktes lineares **Funktional** *auf V ist eine lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{C}$ so dass $|f(v)| \leqslant c \cdot \|v\|_V$ für eine Konstante $c > 0$ unabhängig von $v \in V$. Die* **Dualnorm** *ist definiert durch $\|f\|_{V^*} := \sup\{|f(v)| \,:\, v \in V, \|v\|_V \leqslant 1\}$.*
Der **Dualraum** *V^* eines normierten oder Banachraums V besteht aus allen beschränkten linearen Funktionalen auf V, versehen mit der Dualnorm.*

In dem Fall von reellen normierten Räumen ist die Definition analog.

Tatsachen. 1. Ein lineares Funktional $f : V \to \mathbb{C}$ auf einem *Banachraum* ist beschränkt gdw. es stetig als eine Abbildung zwischen metrischen Räumen V und $\mathbb{C}$ ist (falsch für normierte Räume!).

2. Jedes *beschränkte* lineare Funktional $f : V \to \mathbb{C}$ auf einem normierten Raum V lässt sich eindeutig zu einem beschränkten linearen Funktional $\tilde{f} : \tilde{V} \to \mathbb{C}$ auf die Vervollständigung $\tilde{V}$ von V fortsetzen.

3. Der Dualraum V^* eines normierten Raumes $(V, \|\cdot\|_V)$, versehen mit der Dualnorm, ist ein Banachraum.

Satz 4.4 (Riesz-Satz für L^p-Räume)

Es sei μ ein Maß auf (einer σ-Algebra auf) einem Raum X und $p, q > 1$ reell mit $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Dann für jedes $g(x) \in \mathscr{L}^q(X, \mu)$ ist Abbildung $f(x) \in \mathscr{L}^p(X, \mu) \mapsto \int_X f(x)\bar{g}(x)d\mu(x)$ ein wohl-definirtes lineares Funktional beschränkt bzgl. L^p-Norm und jedes beschränkte lineare Funktional auf $L^p(X, \mu)$ ist von dieser Form und die Dualnorm ist gleich die $L^q(X, \mu)$-Norm.

Definition 4.4 ($L^2(X,\mu)$ als Hilbertraum.)

Das Skalarprodukt zweier Funktionen aus $L^2(X,\mu)$ ist definiert durch $\langle f(x), g(x)\rangle := \int_X f(x)\bar{g}(x)d\mu(x)$.

Folgerungen und Umformulierungen

1. Es sei $V \subset \mathscr{L}^q(X,\mu)$ ein Untervektorraum dicht bzgl. der L^q-Norm und $f(x) \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ eine Funktion, so dass $\int_X f(x)\bar{g}(x)d\mu(x)$ für alle $g(x)$ aus V. Dann $f(x) = 0$ fast überall.

2. Der Dualraum von $L^p(X,\mu)$ ist der Raum $L^q(X,\mu)$.

3. Der abstrakter Riesz-Satz besagt: *Dualraum jedes Hilbertraumes V ist der Raum V selber und die Dualnorm ist gleich die ursprungliche Hilbert-Norm.*

Beweis des Riesz-Satzes. Schritt 1. Spezialfall. Es sei μ ein diskretes Maß mit dem *endlichen* Träger auf X_0. Dann $L^p(X,\mu) = L^p(X_0,\mu) = \{f(x) = \sum_i a_i\chi_{\{x_i\}}\}$ mit $\|f(x)\|^p_{L^p} = \sum_i |a_i|^p\mu(x_i)$. Es sei $F : L^p(X_0,\mu) \to \mathbb{C}$ ein beschränktes lineares Funktional. Setze $b_i := \overline{F(\chi_{\{x_i\}})}/\mu(x_i)$, $g(x) := \sum_i b_i\chi_{\{x_i\}}$ und $h(x) := \sum_i b_i\cdot|b_i|^{q-2}\cdot\chi_{\{x_i\}}\}$. Dann $F(f(x)) = \langle f(x), g(x)\rangle$ für alle $f(x) = \sum_i a_i\chi_{\{x_i\}}$, und deshalb $\|F\|_* \leqslant \|g(x)\|_{L^q}$ nach Hölder-Ungleichung $\|g(x)\|^q_{L^q} = \|h(x)\|^p_{L^p} = \int_X h(x)\bar{g}(x)d\mu(x) = \sum_i |b_i|^q\cdot\chi_{\{x_i\}}\}$. Also wenn wir Normieren $\|g(x)\|_{L^q} = 1$ dann $\|F\|_* = 1$. Dies implizied den Satz für X endlich mit einem diskreten Maß.

Schritt 2. Spezialfall. Es sei μ ein diskretes Maß mit einem beliebigen Träger X_0.Setze $b_i := \overline{F(\chi_{\{x_i\}})}/\mu(x_i)$, $g(x) := \sum_i b_i \chi_{\{x_i\}}$ wie oben. Dann über den Limes über alle *endliche* Teilmenge $X' \subset X_0$ zeige $F(f(x)) = \langle f(x), g(x) \rangle$ und $\|g(x)\|_{L^q} = \|F\|_*$.

Schritt 3. Es sei μ σ-endlich und $X = \cup_i A_i$ eine Zerlegung von X in disjunkte messbare Mengen mit $\mu(A_i) < +\infty$. Setze $b_i := \overline{F(\chi_{A_i})}/\mu(A_i)$ und $g(x) := \sum_i b_i \chi_{A_i}$. Dann für alle Treppenfunktionen $f(x) = \sum_i a_i \chi_{A_i}$ gilt: $F(f(x)) = \langle f(x), g(x) \rangle$ und insbesondere $\|g(x)\|_{L^q} \leqslant \|F\|_*$.

Schritt 4. Behauptung. Es sei μ σ-endlich. Dann existiert eine Folge von Zerlegungen $X = \cup_i A_{k,i}$ von X in disjunkte messbare Mengen mit $\mu(A_{k,i}) < +\infty$ so dass jede nechste Zerlegung verfeinert die vorige und so dass jede fallende Folge $A_{1,i_1} \supset A_{2,i_2} \supset A_{3,i_3} \supset \ldots$ hat als Limes $\cap_k A_{k,i_k}$ die nicht μ-verkleinerbare messbare Menge.

Schritt 5. Die Folge von Funktionen $g_k(x)$, jeweils für die Zerlegung $X = \cup_i A_{k,i}$, ist eine $\|\cdot\|_{L^q}$-Cauchy-Folge mit dem Limes $g_*(x)$ so dass $F(f(x)) = \langle f(x), g_*(x) \rangle$ für alle $f \in L^p(X, \mu)$ und und insbesondere $\|g_*(x)\|_{L^q} = \|F\|_*$.

Definition 5.1 (ℓ^2-Räume)

Die Mengen $\mathbb{N}$ *und* $\mathbb{Z}$ *seien mit dem* **Zählmaß** $\mu_\#$ *versehen, so dass* $\mu_\#(A) =$ *„Anzahl von Elementen in A". Die Räume* ℓ^p *sind definiert als* $\ell^p := L^p(\mathbb{N}, \mu_\#)$*. Dies sind die „*$\ell^p$*-summierbare Folgen"* $a = (a_1, a_2, \dots)$ *mit* $\|a\|_{\ell^p}^p := \sum_i |a_i|^p < +\infty$*.*

Da die Aufzählung von $\mathbb{Z}$ eine Bijektion mit $\mathbb{N}$ bildet, die das Zählmaß erhält, sind $\ell^p(\mathbb{N})$ und $\ell^p(\mathbb{Z})$ kanonisch isomorph.

Definition 5.2 (Separable Hilberträume. ON-Basis eines Hilbertraumes)

Eine Teilmenge A in einem Metrischen Raum X ist **dicht** *falls zu jedem* $x \in X$ *eine Folge* a_i *aus A existiert die zu x konvergiert.* $\Leftrightarrow$ *Der Abschluss von A ist das ganze X.*

Ein Hilbertraum H heißt **separabel** *falls es eine* abzählbare dichte *Teilmenge* $A \subset H$ *existiert.*

Ein **orthonormiertes System** *(***ON-System***) in einem Hilbertraum H ist eine Teilmenge* $B \subset H$ *so dass* $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ *für je zwei Vektoren* v_i, v_j *aus B.*

Ein orthonormiertes System $B = \{v_1, v_2, \dots\}$ *ist* **vollständig** *falls der einzige Vektor* $v \in V$ *orthogonal zu jedem* $v_i \in B$ *ist der Nullvektor* $\vec{0} \in H$*.*

Eine **orthonormierte Basis** *(***ON-Basis***) eines Hilbertraumes H ist ein orthonormiertes System* $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\}$ *so dass* $\forall v \in H$ *sich eindeutig als eine Summe* $v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{e}_i$ *repräsentieren lässt wobei die Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{e}_i$ *bzgl. der Hilbert-Norm konvergiert.*

Der Begriff der ON-Basis eines Hilbertraumes verallgemeinert dessen von ON-Basis eines Euklidischen endlichdimensinalen Vektorraumes.

Satz 5.1 (Separabilität von $L^2(\mathbb{R}^n)$)

(Sep1) *Die Räume $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{Leb})$ und $\ell^2(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{Z})$ sind separabel.*

(Sep2) *Jeder separable Hilbertraum zulässt ein vollständiges ON-System.*

(Sep3) *Jedes vollständige ON-System B in einem Hilbertraum ist eine Basis und umgekehrt.*

(Sep4) *Die Menge $B = \{\mathbf{e}_i\} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ mit $\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, \underset{i\text{-te Stelle}}{1}, 0 \ldots)$ ist eine ON-Basis von $\subset \ell^2(\mathbb{N})$.*

Beweis. Teil (Sep1). Es sei S_0 die Menge von Quadern $Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ so dass a_j, b_j rational sind. Es sei S der Raum von endlichen linearen Kombinationen $\varphi = \sum_{k=1}^N c_k Q_k$ mit Q_k aus S_0 und $c_k = c_k' + \mathbf{i} c_k''$ mit $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ und c_k', c_k'' rational. Da abzählbare Vereinigungen und endliche Produkte abzählbarer Mengen abzählbar sind, ist S abzählbar. Nach der Konstruktion ist S dicht in $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{Leb})$. Der Fall $\ell^2(\mathbb{N})$ und $\ell^2(\mathbb{Z})$ ist ähnlich.

Teil (Sep2). Es sei $S = \{v_1, v_2, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von einem Hilbertraum H. Verwende das Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (ON-Verfahren) zu S und bekomme ein ON-System $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$. Da ich im ON-Verfahrennur nur lineare Operationen verwende, liegt S in dem Vektorraum $\mathbb{C}\langle B\rangle$ erzeugt von B. Damit ist $\mathbb{C}\langle B\rangle$ dicht in H.
Nun sei $w \neq 0 \in H$ ein Vektor, der zu jedem $\mathbf{e}_j$ aus B orthogonal ist. Dann existiert eine Folge w_j aus S, die zu w konvergiert. Da $S \subset \mathbb{C}\langle B\rangle$, ist jedes w_j orthogonal zu w. Anderseits $\langle w_j, w\rangle$ muss zu $\langle w, w\rangle = \|w\|^2 \neq 0$ konvergieren. Der Widerspruch zeigt, dass das ON-System B vollständig ist.

Teil (Sep3). Ein Vektor $w \in H$ orthogonal zu jedem Vektor $\mathbf{e}_j \in B$ ist orthogonal zu jeder linearen Kombination von Vektoren aus B, und deshalb zu jedem $v \in H$. Deshalb ist jede ON-Basis ein vollständiges ON-System.
Umgekehrt, es sei $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\} \subset H$ ein vollständiges ON-System. Für jedes $v \in H$ definiere $c_i := \langle v, \mathbf{e}_i \rangle$ und $v_i := \sum_{j=1}^{i} c_j \mathbf{e}_j$. Dann ist jede Zerlegung $v = \sum_{j=1}^{i} c_j \mathbf{e}_j + (v - v_i)$ orthogonal $\Rightarrow \|v\|^2 = \sum_{j=1}^{i} |c_j|^2 + \|v - v_i\|^2$. Es folgt: Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2$ konvergiert mit $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \leqslant \|v\|^2$ und die Folge v_i ist eine Cauchy-Folge bzgl. der Norm. Deshalb v_i konvergiert zu einem $v_\infty \in H$. Dabei ist $v - v_\infty$ orthogonal zu jedem $\mathbf{e}_j \in B$ und deshalb $v = v_\infty$ nach der Vollständigkeit. Also $v = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathbf{e}_j$ und B ist eine Basis von H.

Teil (Sep4). Die Menge B ist orthonormiert und vollständig. □
Das Intervall $[0, 2\pi]$ sei mit dem Lebesgue-Maß versehen.

Satz 5.2 (Fourier-Reihen)

Die beiden Systeme $B_{exp} := \{\exp(\mathbf{i}nx) : n \in \mathbb{Z}\}$ *und* $B_{trig} := \{\frac{1}{2}, \cos(nx), \sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ *sind orthogonal und vollständig in* $L^2[0, 2\pi]$.

Beweis. Die Orthogonalität lässt sich direkt überprüfen. Man braucht nur zu zeigen, dass jede $f(x) \in \mathscr{L}^2[0, 2\pi]$ ist als eine Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x)$ mit φ_j aus B_{exp} bzw. B_{trig} dargestellt werden kann, und die Reihe konvergiert in L^2-Norm.
Es sei $\mathcal{A}$ der Vektorraum von endlichen linearen Kombinationen aus B_{exp}. Dann ist $\mathcal{A}$ auch auch als der Vektorraum von endlichen linearen Kombinationen aus B_{trig}.

Außerdem hat $\mathcal{A}$ die folgenden Eigenschaften:
(WS1) zu jeder $f(x)$ aus $\mathcal{A}$ ist die komplex konjugierte $\bar{f}(x)$ auch in $\mathcal{A}$.
(WS2) Das Produkt zweier Funktionen aus $\mathcal{A}$ liegt in $\mathcal{A}$.
(WS3) Für jede zwei Punkte $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ existiert $f(x) \in \mathcal{A}$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Nach dem Satz von Weierstraß und Stone ist die Menge $\mathcal{A}$ dicht in dem Raum $C^0([0, 2\pi])$ von stetigen Funktionen versehen mit $\sup$-Norm. Dies impliziert, dass $\mathcal{A}$ dicht in dem Raum $L^2([0, 2\pi])$ ist. □

Eigenschaften von Fourier-Reihen

(FR1) Jede Funktion $f(x) \in \mathscr{L}^2([0, 2\pi])$ ist die Summe einer **Fourier-Reihe** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{i}nx}$ wobei die Reihe bzgl. der L^2-Norm konvergiert.

(FR2) Die Koeffizienten c_n lassen sich mit der Formel $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-\mathbf{i}nx} f(x) dx$ berechnen.

(FR3) Es gilt $\|f(x)\|^2_{L^2([0,2\pi])} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$.

(FR4) Es sei $f(x)$ auf $[0, 2\pi]$ stetig differenzierbar und mit den Fourier-Koeffizienten c_n. Dann kann man die Fourier-Reihe von $f(x)$ gliedweise differenzieren und die Ableitung $f'(x)$ hat die Fourier-Koeffizienten $\mathbf{i}nc_n$.

Beispiel der Anwendung. Man möchte die Wellengleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)$ für 2π-periodische Funktionen $f(x,t) = f(x + 2\pi, t)$ lösen. Für die Koeffizienten $c_n(t)$ der Fourier-Reihe bekommt man jeweils eine gewöhnliche DGl $c_n''(t) + a^2 n^2 c_n(t) = 0$, die leicht zu lösen und interpretieren ist. Jede „Eigenfunktion“ („Harmonik“) $\cos(nx), \sin(nx)$ schwingt mit eigene Geschwindigkeit na unabhängig von anderen Eigenfunktionen.

Man möchte eine ähnliche Darstellung $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{i}nx}$ auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ konstruieren.

Definition 5.3 (Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$.)

Es sei $f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Die Fourier-Transformierte von $f(x)$ ist die Funktion

$$\mathscr{F}f(y) = \hat{f}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathbf{i}\langle x,y\rangle} d^n x \qquad \langle x,y\rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \tag{5.1}$$

Satz 5.3 (Eigenschaften der Fourier-Transformation)

(Fou1) *Die Fourier-Transformierte $\hat{f}(y)$ einer $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion ist stetig und beschränkt:* $\sup(|\hat{f}(y)|) \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

(Fou2) *Es sei $\tau_a f(x) := f(x-a)$ die Translation von $f(x)$. Dann $\widehat{\tau_a f}(y) = \hat{f}(y) e^{-\mathbf{i}\langle a,y\rangle}$. Es sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann $\widehat{f \circ A}(y) = |\det A|^{-1} \hat{f}({}^t A^{-1} y)$.*

(Fou3) *Es sei $f(x)$ stetig und stetig differenzierbar nach x_j und so dass identisch Null außerhalb eines Balls $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$. Dann $\mathscr{F}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(y) = \mathbf{i} x_j \mathscr{F}f(y)$.*

(Fou4) *Sind beide Funktionen $f(x)$ und $x_j \cdot f(x)$ Lebesgue-integrierbar, so ist $\mathscr{F}(f)$ stetig differenzierbar nach y_j und $\mathscr{F}(x_j f)(y) = \mathbf{i} \frac{\partial \mathscr{F} f}{\partial y_j}(y)$.*

(Fou5) *Es seien $f(x), g(y)$ Lebesgue-integrierbar in $\mathbb{R}^n$. Dann für $\hat{g}(x) := \mathscr{F}g(x) := \int e^{-\mathbf{i}\langle x,y\rangle} d^n y$ gilt: $\int \hat{f}(y) g(y) d^n y = \int f(x) \hat{g}(x) d^n x$.*

Bemerkung. ${}^t A$ ist die Transponierung der Matrix A.

Beweis. (Fou1). Erstens, für jedes $f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und jedes $y \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $f(x)e^{-\mathbf{i}\langle x,y\rangle}$ Lebesgue-integrierbar (warum?). Damit ist die Fourier-Transformierte $\hat{f}(y)$ überall wohl-definiert und erfüllt $|\hat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Nun approximiere $f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ durch endliche Treppenfunktion $\varphi = \sum_{k=1}^N C_k \chi_{Q_k}$ so dass $\|f(x) - \varphi(x)\|_{L^1} < \varepsilon$. Damit $|\hat{f}(y) - \hat{\varphi}(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{n/2}}$ für jedes $y \in \mathbb{R}^n$. Aber die Fourier-Transformierte $\hat{\varphi}(y)$ ist stetig. Also für y_1 beliebig fest und y_2 nah genug an y_1 gilt: $|\hat{\varphi}(y_1) - \hat{\varphi}(y_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{n/2}}$. Deshalb $|\hat{f}(y_1) - \hat{f}(y_2)| \leqslant \frac{3\varepsilon}{(2\pi)^{n/2}}$. Also $\hat{f}(x)$ ist stetig.

(Fou2). Der erste Teil ist offensichtlich. Für den zweiten benutzt man die Transformationsformel.

(Fou3). Man benutzt die partielle Integration.

(Fou4). Man beweist zuerst die Formel für endliche Treppenfunktionen. Dann zeigt man, dass es eine Approximation $\varphi_k(x) \longrightarrow f(x)$ existiert, so dass auch $x_j\varphi_k(x)$ zu $x_j f(x)$ in L^1-Norm konvergiert.

(Fou5). Da $\hat{f}(y)$ und $\hat{g}(x)$ beide beschränkt sind, sind die Integrale $\int \hat{f}(y)g(y)d^ny$ und $\int f(x)\hat{g}(x)d^nx$ wohl-definiert. Nun verwendet man den Fubini-Satz für $\iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y)e^{-\mathbf{i}\langle x,y\rangle}\, d^nx\, d^ny$.

Satz 5.4 (Umkehrung der Fourier-Transformation)

Es sei $f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Fourier-Transformierten $\hat{f}(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{+\mathbf{i}\langle x,y\rangle}\, d^ny \tag{5.2}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Definition 5.4 (Faltung von $\mathscr{L}^1$-Funktionen.)

Es sei $f(x), g(x)$ zwei $\mathscr{L}^1$-Funktionen in $\mathbb{R}^n$. Die **Faltung** *$f*g$ von f und g ist die Funktion $f*g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)d^n y$*

Lemma 5.5

Die Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)d^n y$ existieren für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Die Faltung $f*g$ zweier $\mathscr{L}^1$-Funktionen in $\mathbb{R}^n$ ist eine wohl-definierte $\mathscr{L}^1$-Funktion, so dass $f*g(x) = g*f(x)$ fast überall und $\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Beweis. Nach dem Fubini-Satz ist die Funktion $f(x) \cdot g(y)$ Lebesgue-integrierbar in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Nach dem Transformationssatz das gleiche gilt für $f(x-y) \cdot g(y)$. Nun sagt der Fubini-Satz, dass $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)d^n y$ existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f*g(x)d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d^n x \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(y)d^n y$.
Der Vergleich von Integralen ergibt die Ungleichung $|f*g(x)| \leqslant (|f|*|g|)(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und damit

$$\|f*g\|_{L^1} = \int |f*g(x)|d^n x \leqslant \int |f|*|g|(x)d^n x = \int |f(x)|d^n x \cdot \int |g(y)|d^n y = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

Für die Gleichung $f*g(x) = g*f(x)$ benutzt man den Transformationssatz für den Koordinatenwechsel $A(y) = x - y$ im Integral $\int f(y)g(x-y)d^n y$. □

Lemma 5.6 (Fourier-Transformation von Faltungen)

Es sei $f(x), g(x)$ zwei $\mathscr{L}^1$-Funktionen in $\mathbb{R}^n$. Dann $\widehat{f*g}(y) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(y) \cdot \hat{g}(y)$.

Beweis. Mit Hilfe von Fubini-Satz bekommt man $(2\pi)^{n/2}\widehat{f*g}(y) =$
$\iint f(t)g(x-t)e^{-\mathbf{i}\langle x,y\rangle}d^ntd^nx = \iint f(t)g(x-t)e^{-\mathbf{i}\langle t,y\rangle}e^{-\mathbf{i}\langle x-t,y\rangle}d^ntd^nx =$
$\int f(t)e^{-\mathbf{i}\langle t,y\rangle}d^nt\cdot\int g(x-t)e^{-\mathbf{i}\langle x-t,y\rangle}d^nx = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(y)\cdot(2\pi)^{n/2}\hat{g}(y)$. □

Definition 5.5 (Schwartzraum.)

Eine glatte Funktion $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ ist **schnell fallend** *falls für jedes Polynom $P(x)$ in $\mathbb{R}^n$ und jede Ableitung $\frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}f(x)$ das Produkt $P(x)\cdot\frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}f(x)$ beschränkt ist.*
Der Raum aller schnell fallender Funktionen $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ heißt **Schwartzraum** *und wird mit $\mathscr{S}$ oder $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.*
Der **Träger** *einer stetigen Funktion $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ ist der Abschluss der Menge $\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\neq 0\}$. Der Raum stetiger (bzw. glatter) Funktionen mit kompaktem Träger wird mit $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ (bzw. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$) bezeichnet.*

Beim Betrachten von schnell fallende Funktionen reicht es, dass man nur die Monome $x^I = x_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{i_n}$ benutzt. Jede Funktion $f(x)$ aus $\mathscr{S}$ ist L^p-integrierbar für alle $1\leqslant p<+\infty$ (warum?).

Notation. Für Multiindizes $I=(i_1,\ldots,i_n)$ und $J=(j_1,\ldots,j_n)$ definiert man $|I|:=i_1+\cdots+i_n$, $x^I:=\prod_{a=1}^n x_a^{i_a}$ (dies ist ein Monom), $|J|:=j_1+\cdots j_n$ und $\frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}f(x) := \frac{\partial^{|J|}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}f(x)$.

Nachtrag: Topologie, Konvergenz und Metrik in Raum $\mathscr{S}$

Der Schwartzraum $\mathscr{S}$ wird mit Normen $\|f\|_{\mathscr{S},I,J} := \|x^I \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} f(x)\|_{\sup}$ versehen. Eine Folge $f_k(x)$ in $\mathscr{S}$ konvergiert in $\mathscr{S}$ zu $f(x)$ falls $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{\mathscr{S},I,J} = 0$ für alle Multiindizes I, J. Anstatt der Normen $\|f\|_{\mathscr{S},I,J}$ kann man die Metrik $d_{\mathscr{S}}(f(x), g(x)) = \sum_{I,J} 2^{-|I|-|J|} \frac{\|f-g\|_{\mathscr{S},I,J}}{1+\|f-g\|_{\mathscr{S},I,J}}$ benutzen: $f_k(x) \xrightarrow[\mathscr{S}]{} f(x)$ genau dann wenn $\lim_{k\to\infty} d_{\mathscr{S}}(f(x) - f_k(x)) = 0$.

Definition 5.6 (Dirac-Folge.)

Es sei $\psi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *eine Funktion, so dass* $\psi(x) \geqslant 0$ *und* $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) = 1$, *und* $\varepsilon_k \searrow 0$ *eine Folge monoton fallend zu* 0. *Die Dirac-Folge ist die Folge von Funktionen* $\psi_k(x) := \varepsilon_k^{-n} \psi(\frac{x}{\varepsilon_k})$.

Lemma 5.7 (Faltung mit Dirac-Folgen)

Es sei $\psi_k(x)$ *eine Dirac-Folge und* $f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$. *Dann* $\psi_k * f(x) \in \mathscr{S}$ *und* $\lim_{k\to\infty} \|f(x) - \psi_k * f(x)\|_{L^1} = 0$.

Beweis. Schritt 1. Behauptung. $\lim_{a\to 0}\|f(x+a)-f(x)\|_{L^1}=0$. Insbesondere, $\|f(x+a)-f(x)\|_{L^1}$ wird klein genug für $a\in\mathbb{R}^n$ klein genug.
Beweis. Es sei $\eta>0$. Approximiere $f(x)$ mit einer endlichen Treppenfunktion $\varphi(x)=\sum_{j=1}^{N}c_j\chi_{Q_j}$ so dass $\|f(x)-\varphi(x)\|_{L^1}<\frac{\eta}{3}$. Dann $\exists\delta>0$ so dass $\|\varphi(x+a)-\varphi(x)\|_{L^1}<\frac{\eta}{3}$ für alle $|a|<\delta$. Dann
$\|f(x+a)-f(x)\|_{L^1}\leqslant\|f(x+a)-\varphi(x+a)\|_{L^1}+\|\varphi(x+a)-\varphi(x)\|_{L^1}+\|\varphi(x)-f(x)\|_{L^1}<\eta$.
Schritt 2. Behauptung. $\forall\varepsilon>0\,\forall r>0\,\exists k_0\,\forall k\geqslant k_0$ gilt: $\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,r)}\psi_k(x)d^nx<\varepsilon$.
Beweis. Da $\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)d^nx=1$, existiert $R>0$ mit $\int_{B(0,R)}\psi(x)d^nx\geqslant 1-\varepsilon$. Nun braucht man den Ball $B(0,R)$ so schrumpfen, dass er in $B(0,r)$ liegt.
Schritt 3. Für $\varepsilon>0, r>0$, und $k\geqslant k_0$ wie oben und für $a\in B(0,r)$ gilt: $\|f(x)-\psi_k*f(x)\|_{L^1}<\varepsilon$.

Lemma 5.8 (Fourier-Transformation von Glockenfunktion)

$\mathscr{F}(e^{-|x|^2/2})=e^{-|y|^2/2}$.

Beweis. Da $e^{-|x|^2/2}=\prod_{j=1}^{n}e^{-x_j^2/2}$, die Formel für $n=1$ beweist den allgemeinen Fall mit Hilfe des Fubini-Satzes..

Es sei $I_0 := \int e^{-x^2/2}dx$. Dann $I_0^2 = \int e^{-x^2/2}dx \cdot \int e^{-y^2/2}dy =$ (Fubinisatz)
$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2-y^2)/2}dxdy$ (Transformation in Polarkoordinaten)
$= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-(r^2)/2} rdr\, d\varphi = 2\pi \int_{r=0}^{\infty} e^{-(r^2)/2} rdr =$ (Substitution $r^2/2 = t$)
$= 2\pi \int_{t=0}^{\infty} dt = 2\pi$. Damit $I_0 := \int e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$.
Nun sei $\hat{f}(y) := \mathscr{F}(e^{-x^2/2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2-\mathbf{i}xy}dx$. Dann $\frac{d}{dy}\hat{f}(y) =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (-\mathbf{i}x)\, e^{-x^2/2-\mathbf{i}xy}dx =$ (Partielle Integration von $xe^{-x^2/2}$)
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to+\infty}[\mathbf{i}\, e^{-x^2/2-\mathbf{i}xy}]_{x=-R}^{R} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int -ye^{-x^2/2-\mathbf{i}xy}dx = -y\hat{f}(y)$. Die einzige Funktion, die die DGl $\frac{d}{dy}\hat{f}(y) = -y\hat{f}(y)$ und die Anfangsbedingung $\hat{f}(0) = 1$ ist $\hat{f}(y) = e^{-y^2/2}$. □

Beweis des Umkehrungssatzes. Betrachte $\psi_1(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/2}$, $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$, und damit $\psi_k(x) := k^n\psi_1(kx)$ die entsprechende Dirac-Folge. Dann $\psi_k(t) =$
$\frac{k^n}{(2\pi)^n} \int e^{-|y|^2/2+\mathbf{i}\langle y,kt\rangle}dy =$ (Transformation $ky \mapsto y$) $= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-|y|^2/2k^2+\mathbf{i}\langle y,t\rangle}dy$
und $f * \psi_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{-|y|^2/2k^2+\mathbf{i}\langle y,x-t\rangle} f(t)dydt =$ (Integration erst nach t)
$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \big(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} f(t)e^{-\mathbf{i}\langle y,t\rangle}dt\big)e^{-|y|^2/2k^2+\mathbf{i}\langle y,x\rangle}dy =$ (Ausrechnen)
$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{f}(y)e^{-|y|^2/2k^2+\mathbf{i}\langle y,x\rangle}dy$. Die Funktionen $\hat{f}(y)e^{-|y|^2/2k^2+\mathbf{i}\langle y,x\rangle}$ wird von $|\hat{f}(y)|$ majorisiert, also nach Lebesgue-Satz konvergieren die Integrale zu
$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{f}(y) \lim_{k\to\infty} e^{-|y|^2/2k^2+\mathbf{i}\langle y,x\rangle}dy = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{f}(y)e^{+\mathbf{i}\langle y,x\rangle}dy$. Anderseits sind die Integrale gleich $f * \psi_k(x)$ und damit konvergieren zu $f(x)$ bzgl. der L^1-Norm und fast überall. □

Satz 5.9 (Fourier-Transformation im Schwartzschen Raum $\mathscr{S}$)

Die Fourier-Transformierte einer Funktion $f(x) \in \mathscr{S}$ liegt in $\mathscr{S}$ und die Eigenschaften (Fou1-Fou5) gelten.

Beweis. Weil die Funktion und ihre Ableitungen schnell verschwinden in unendlichen, gilt die Eigenschaft (Fou3). Restliche Eigenschaften brauchen keinen Beweis.

Für Multiindizes $I = (i_1, \dots, i_n)$ und $J = (j_1, \dots, j_n)$ definiert man $x^I := \prod_{a=1}^n x_a^{i_a}$ (dies ist ein Monom), $|J| := j_1 + \cdots j_n$ und $\frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} f(x) := \frac{\partial^{|J|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} f(x)$. Dann für $f(x) \in \mathscr{S}$ gilt $\mathscr{F}(x^I \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} f(x)) = \mathbf{i}^{|I|+|J|} \frac{\partial^{|I|}}{\partial y^I} (y^J \hat{f}(y))$.

Schritt 1. Behauptung. $\frac{\partial^{|I|}}{\partial y^I} (y^J \hat{f}(y)) = y^J \frac{\partial^{|I|}}{\partial y^I} \hat{f}(y) + \sum_{I',J'} C_{I',J'} y^{J'} \frac{\partial^{|I'|}}{\partial y^{I'}} \hat{f}(y)$ wobei die Summe läuft über Multiindizes I', J' mit $|I'| < |I|, |J'| < |J|$, $C_{I',J'}$ sind Konstanten.

Beweis der Behauptung. Es reicht dies nur im Fall $|I| = |J| = 1$ zu zeigen (warum?). Aber $\frac{\partial}{\partial y_i} (y_j \hat{f}(y)) = y_j \frac{\partial}{\partial y_i} \hat{f}(y) + \delta_{ij} \hat{f}(y)$.

Schritt 2. Die Behauptung zeigt, dass $\|y^J \frac{\partial^{|I|}}{\partial y^I} \hat{f}(y)\|_{sup}$ durch $\sum_{I',J'} |C_{I',J'}| \cdot \|x^{I'} \frac{\partial^{|J'|}}{\partial x^{J'}} f(x)\|_{L^1}$ von oben beschränkt sind. □

Satz 5.10 (Plancherel-Gleichung.)

Für $f(x), g(x) \in \mathscr{S}$ gilt: $\langle f(x), g(x)\rangle = \langle \hat{f}(y), \hat{g}(y)\rangle$. Insbesondere $\|f(x)\|_{L^2} = \|\hat{f}(y)\|_{L^2}$.

Beweis. $\langle f(x), g(x)\rangle = \int f(x)\bar{g}(x) d^n x = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x)\overline{\hat{g}(y) e^{+\mathrm{i}xy}} d^n x d^n y =$
$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x)\bar{\hat{g}}(y) e^{-\mathrm{i}xy} d^n x d^n y = \int \bar{\hat{f}}(y)\bar{\hat{g}}(y) d^n y = \langle \hat{f}(y), \hat{g}(y)\rangle$. □

Definition 5.7 (Fourier-Transformation in L^2.)

Die Fourier-Transformation einer Funktion $f(x) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ ist $\|\cdot\|_{L^2}$-Limes $\lim_k \hat{\varphi}(y)$ von Fourier-Transformierten einer Folge $\varphi_k(x) \in \mathscr{S}$ mit $\lim_k \varphi_k(x) = f(x)$.

Die Plancherel-Gleichung zeigt, dass Fourier-Transformation einer $\|\cdot\|_{L^2}$-Cauchy Folge in $\mathscr{S}$ ist eine $\|\cdot\|_{L^2}$-Cauchy Folge. Außerdem für zwei Folgen $\varphi_k(x), \psi_k(x) \in \mathscr{S}$ mit $\lim_k \varphi_k(x) = \lim_k \psi_k(x) = f(x)$ haben die Fourier-Transformierten Folgen $\hat{\varphi}_k(y), \hat{\psi}_k(y) \in \mathscr{S}$ den gleichen L^2-Limes.

Satz 5.11 (Heisenberg-Ungleichung.)

Für $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ gilt: $\|xf(x)\|_{L^2} \cdot \|f'(x)\|_{L^2} \geqslant \frac{1}{2}\|f(x)\|_{L^2}^2$.

Eine Version der Ungleichung: $\|xf(x)\|_{L^2} \cdot \|y\hat{f}(y)\|_{L^2} \geqslant \frac{1}{2}\|f(x)\|_{L^2}^2$.

Beweis. Nach dem Cauchy-Schwarz-Hölder Ungleichung $\|xf(x)\|_{L^2} \cdot \|y\hat{f}(y)\|_{L^2} \geqslant |\langle xf(x), f'(x)\rangle|$. $\quad (*)$
Außerdem $\langle xf(x), f'(x)\rangle = \int xf(x)\bar{f}'(x)dx =$ (Partielle Integration von $f'x$))
$= \lim_{R\to\infty}[xf(x)\bar{f}(x)]_{x=-R}^{R} - \int \bar{f}(x)\frac{d}{dx}(x(f(x))dx$
$= -\int \bar{f}(x)f(x)dx - \int \bar{f}(x)xf'(x))dx = -\|f(x)\|_{L^2}^2 - \overline{\langle xf(x), f'(x)\rangle}$. Deshalb $\Re(\langle xf(x), f'(x)\rangle) = -\frac{1}{2}\|f(x)\|_{L^2}^2$. ($\Re(z)$ ist der Reellteil von z.) Zusammen mit $(*)$ bekommt man die Behauptung des Satzes. □

Definition 5.8 (Der Schwartzsche Raum $\mathscr{S}'$)

Der Schwartzsche Raum $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ besteht aus stetigen linearen Funktionalen $\varphi : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. **Notation.** $\varphi(f(x)) = \varphi(f) = \int f(x)\varphi(x)d^n n = \langle f(x), \bar{\varphi}(x)\rangle = \langle f, \bar{\varphi}\rangle$ *(Warnung: die Werte $\varphi(x)$ sind nicht definiert!). Die Funktionale $\varphi : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ werden* **langsam wachsende Distributionen** *oder* **langsam wachsende verallgemeinerte Funktionen** *genannt. Die Stetigkeit eines Funktionalen $\varphi : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ bedeutet, dass es $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass φ eine Abschätzung $|\varphi(f)| \leqslant C \cdot \sum_{|I|+|J|\leqslant k} \|f\|_{\mathscr{S},I,J}$ mit C unabhängig von $f \in \mathscr{S}$ erfüllt.*

Lemma 5.12 (L^p-Funktionen und Maße als Distributionen)

i) Für jede Funktion $f(x) \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ist die Abbildung $g(x) \in \mathscr{S} \mapsto \int f(x)g(x)d^n x$ eine wohl-definierte Distribution.

ii) Für jedes Maß μ auf der σ-Algebra $\mathscr{M}ess$ der Lebesgue-messbaren Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit $\int (1+|x|)^{-s} d\mu(x) < \infty$ für ein $s \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $g(x) \in \mathscr{S} \mapsto \int g(x)d\mu(x)$ eine wohl-definierte Distribution.

Beweis. Hilfslemma. Die Funktionen $f(x) = (1+|x|)^{-s}$ in $\mathbb{R}^n$ sind Lebesgue-integrabel für $s > n$.

Beweis. Die Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^n$ sind definiert durch $x_1 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}$, $x_2 = r\cos\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}$, $x_3 = r\cos\varphi_2\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}$, $\ldots x_k = r\cos\varphi_{k-1}\sin\varphi_k\ldots\sin\varphi_{n-1}$, $x_n = \cos\varphi_{n-1}$, wobei $r \in [0,+\infty)$, $\varphi_1 \in [0,2\pi]$, und $\varphi_k \in [0,\pi]$ für $k = 2,\ldots,n-1$. Beim Ausrechnen der Jacobischen Matrix bekommt man $\det J_P = r^{n-1}\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ mit einer Funktion $\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ unabhängig von r. Deshalb $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-s}d^nx =$ (Umrechnung in Kugelkoordinaten + Satz von Fubini) $= \int_{r=0}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{(1+r)^s}dr\cdot\int_Q\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}d^{n-1}\varphi$ und das Integral $\int_{r=0}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{(1+r)^s}dr$ konvergiert für $s > n$.

i) Für $p = 1$ hat man $|\int f(x)g(x)dx| \leqslant \int|f(x)|dx\cdot\|g(x)\|_{\sup} = \|f(x)\|_{L^1}\cdot\|g(x)\|_{\sup}$. Für $1 < p < +\infty$ benutzen wir die Hölder-Ungleichung $|\int f(x)g(x)dx| \leqslant \|f(x)\|_{L^p}\cdot\|g(x)\|_{L^q}$. Also wird die Abschätzung von $\|g(x)\|_{L^q}$ implizieren, dass $g(x) \in \mathscr{S} \mapsto \int f(x)g(x)d^nx \in \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung ist. Die Norm $\|g(x)\|_{L^q}$ wird in zwei „Stücken“ abgeschätzt. Es sei B der Einheitsball in $\mathbb{R}^n$ und χ_B die charakteristische Funktion. Dann $g = \chi_B\cdot g + (1-\chi_B)\cdot g$ und deshalb $\|g(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\chi_B\cdot g(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|(1-\chi_B)\cdot g(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$. Der erste Teil $\|\chi_B\cdot g(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|g(x)\|_{L^q(B)}$ wird durch $\mathrm{Vol}(B)^{1/q}\cdot\|g(x)\|_{\sup}$ von oben beschränkt. Bei zweitem $\|(1-\chi_B)\cdot g(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|g(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^n\setminus B)}$ benutzen wir die Abschätzung $|g(x)| \leqslant C_k\cdot|x|^{-k}\sum_{|I|=k}\|g\|_{\mathscr{S},I,\varnothing}$ und die Tatsache, dass die Funktion $|x|^{-s}$ mit $s > n$ Lebesgue-Integrierbar in $\mathbb{R}^n\setminus B$ ist.

ii) $\int g(x)d\mu(x) \leqslant \int(1+|x|)^{-s}d\mu(x)\cdot\|(1+|x|)^s g(x)\|_{\sup}$, also ist das Funktional $g(x) \in \mathscr{S} \mapsto \int g(x)d\mu(x)$ beschränkt durch $C\cdot\sum_{|I|+|J|\leqslant k}\|g\|_{\mathscr{S},I,J}$ für jedes $k > s$.

Operationen im Schwartzschen Raum $\mathscr{S}'$.

Wichtigste Operationen im Raum $\mathscr{S}$ — Ableitung und Fourier-Transformation — sind stetige lineare Operatoren $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ bzw. $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$. Für jeden stetige lineare Operator $T : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ definiert man die Fortsetzung $T : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ von T auf $\mathscr{S}'$ nach folgender Regel: Erstmal definiert man den **dualen Operator** $T^\dagger : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ durch die Formel $\langle Tf(x), g(x) \rangle = \langle f(x), T^\dagger g(x) \rangle$ für $f(x), g(x) \in \mathscr{S}$, und dann die Fortsetzung $T : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ durch die gleiche Formel $\langle T\varphi(x), g(x) \rangle = \langle f(x), T^\dagger g(x) \rangle$ für $\varphi(x) \in \mathscr{S}'$ und $g(x) \in \mathscr{S}$. Die beide Operatoren — $T^\dagger : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ und $T : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ — sind dann auch stetig. Insbesondere für die Ableitungen und Fourier-Transformation bekommt man die folgeden Definitionen:

Definition 5.9 (Ableitung und Fourier-Transformation in $\mathscr{S}'$.)

i) **Fourier-Transformation in $\mathscr{S}'$:** $\int \mathscr{F}(\varphi)(y) g(y) d^n y := \int \varphi(x) \mathscr{F}^{-1} g(x) d^n x$ *für $\varphi(x)$ aus $\mathscr{S}'$ und $g(y) \in \mathscr{S}$;*

ii) **schwache Ableitung in $\mathscr{S}'$:** $\int \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^I \varphi(x) g(x) d^n y := \int \varphi(x) \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^I g(x) d^n x$ *für $\varphi(x)$ aus $\mathscr{S}'$ und $g(x) \in \mathscr{S}$;*

ii) **Multiplikation von Funktionen und Distributionen:**
$\int \left(\varphi(x) \cdot f(x)\right) g(x) d^n y := \int \varphi(x) \left(f(x) \cdot g(x)\right) d^n x$ *für $\varphi(x)$ aus $\mathscr{S}'$ und $f(x), g(x) \in \mathscr{S}$.*

wobei $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^I f(x)$ ist die andere Bezeichnung für die partielle Ableitung $\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} f(x)$. Die Notation schwache Ableitung ist benutzt um von der üblichen Ableitung (definiert in „δ–ε“-Sprache) zu unterscheiden.

Notation. Eine glatte funktion $f(x)$, so dass alle Ableitungen $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^l f(x)$ in $\mathscr{S}'$ liegen, heißt **langsam wachsend.** Dies bedeutet dass alle Ableitungen $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^l f(x)$ wachsen nicht schneller als polynomial: $\forall l \exists k$ so dass $|(\frac{\partial}{\partial x})^l f(x)| \leqslant C\cdot(1+|x|)^k$.

Lemma 5.13 (Eigenschaften von Fourier-Transformation und schwacher Ableitung)

i) Die übliche und die schwache Ableitung einer glatten (langsam wachsenden) Funktion $f(x)$ sind gleich.
ii) Die Fourier-Transformation und schwache Ableitungen erfüllen „übliche“ Formeln. Insbesondere gilt der Satz 5.3 für $\varphi(x) \in \mathscr{S}'$.
iii) Das Produkt $\varphi(x)\cdot f(x)$ einer Distribution $\varphi(x) \in \mathscr{S}'$ und einer glatten langsam wachsenden Funktion $f(x)$ ist wohl-definiert und liegt in $\mathscr{S}'$.

Beweis. *i)* Man zeigt, dass die Formel $\int \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)g(x)d^nx := \int -\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x_j}g(x)d^nx$ gilt für $\varphi(x)$ glatt langsam wachsend und $g(x) \in \mathscr{S}$. Es sei $Q(R)$ der Würfel $[-R,R]\times\ldots,[R,R]$. Dann $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)g(x)d^nx = \lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{Q(R)}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)g(x)d^nx = \lim_{R\longrightarrow\infty} -\int_{Q(R)}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x_j}g(x)d^nx + \lim_{R\longrightarrow\infty}[\int_{\mathbb{R}^{n-1}}[\varphi(x)g(x)]_{x_j=-R}^{R}d^{n-1}x'$, wobei das letzte Integral wird über restliche Variablen $x' = (x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots x_n)$ genommen. Dabei $\lim_{R\longrightarrow\infty} -\int_{Q(R)}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x_j}g(x)d^nx = -\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x_j}g(x)d^nx$ und $\lim_{R\longrightarrow\infty}[\int_{\mathbb{R}^{n-1}}[\varphi(x)g(x)]_{x_j=-R}^{R}d^{n-1}x' = 0$. Hier benutzt man die Definition des Raumes $\mathscr{S}$ um zu zeigen, dass der Term $[\varphi(x)g(x)]_{x_j=-R}^{R}$ durch $C\cdot(1+R)^{-1}\cdot(1+|x'|)^s$ mit $s > n-1$ beschränkt ist.

ii) Die Definition der Fourier-Transformation von $\varphi(x) \in \mathscr{S}'$ kann man als die Formel (Fou5) aus dem Satz 5.3 auf der Seite 52 umformulieren: für jede Funktion $f(y) \in \mathscr{S}$ mit $\hat{f}(x) := \mathscr{F}(f)(x)$ gilt $\int \varphi(x)\hat{f}(x)d^n x = \int \hat{\varphi}(y)f(y)d^n y$. Nun verwendet man die Formeln (Fou2–Fou5) zu jedem $f(y) \in \mathscr{S}$ und benutzt (wenn nötig) die Definition der (schwachen) Ableitung von Distributionen.

iii) Dies ist die formale Folgerung der Definition des Produktes $\varphi(x) \cdot f(x)$: für jede Funktion $g(x) \in \mathscr{S}$ gilt $\int (\varphi(x) \cdot f(x)) \cdot g(x) d^n x = \int (\varphi(x) \cdot g(x)) \cdot f(x) d^n x$, wobei das Produkt $\varphi(x) \cdot f(x)$ in $\mathscr{S}$ liegt (warum?). $\square$

Definition 5.10

Der **Laplace-Operator** Δ *in* $\mathscr{S}$ *ist definiert durch* $\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(x)$.

Folgerung: Fourier-Transformation von Laplace-Operator

Die Fourier-Transformation von Laplace-Operator ist $\mathscr{F}(\Delta f)(y) = -|y|^2 \cdot \hat{f}(y)$.

Definition 5.11 (Potenzen von Operator $1 - \Delta$.)

Für jedes $s \in \mathbb{R}$ *ist die Funktion* $(1 + |y|^2)$ *glatt und langsam wachsend. Man definiert die Operatoren* $(1-\Delta)^s$ *durch* $(1-\Delta)^s f(x) := \mathscr{F}^{-1}\big((1+|y|^2)^s \cdot \hat{f}(y)\big)$. *Die Operatoren* $(1-\Delta)^s$ *sind stetige lineare Abbildungen von* $\mathscr{S}$ *nach* $\mathscr{S}$ *und von* $\mathscr{S}'$ *nach* $\mathscr{S}'$.

Bemerkung. Für $s \in \mathbb{N}$ ist der Operator $(1-\Delta)^s$ die normale Komposition.

Definition 5.12 (Spezielle Normen in Räumen $\mathscr{S}$ und $\mathscr{S}'$.)

Man definiert die $\mathscr{H}_{s,t}$-Normen auf $\mathscr{S}$ durch
$\|f(x)\|_{\mathscr{H}_{s,t}} := \|(1+|x|^2)^{s/2}\cdot(1-\Delta)^{t/2}f(x))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ *und die Räume $\mathscr{H}_{s,t}$ als Vervollständigung von $\mathscr{S}$ nach den entsprechenden $\mathscr{H}_{s,t}$-Normen.*

Erinnerung. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum X sind äquivalent falls $c\cdot\|v\|_2 \leqslant \|v\|_1 \leqslant C\cdot\|v\|_2$ für Konstanten $c, C > 0$ unabhängig von $v \in X$.
Ein (linearer) Operator zwischen Banach-Räumen X und Y ist beschränkt falls $\|Av\|_Y \leqslant C\cdot\|v\|_X$ für alle $v \in X$ mit C unabhängig von v, siehe Definition 2.9.

Satz 5.14

i) Für $s, t \in \mathbb{N}$ ist die Norm $\|f(x)\|^2_{\mathscr{H}_{s,t}}$ äquivalent zu $\sum\limits_{|I|\leqslant s, |J|\leqslant t} \|x^I \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^J f(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

ii) Es gilt $\mathscr{H}_{s,t} \subset \mathscr{H}_{s',t'}$ für $s \geqslant s'$ und $t \geqslant t'$. Darüber hinaus, $\mathscr{S} = \cap_{s,t\in\mathbb{R}}\mathscr{H}_{s,t}$ und $\mathscr{S}' = \cup_{s,t\in\mathbb{R}}\mathscr{H}_{s,t}$.
iii) Die folgende Operatoren sind beschränkt:

- *Ableitungsoperatoren $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathscr{H}_{s,t} \to \mathscr{H}_{s,t-1}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$;*
- *Multiplikation mit einem Polynom $P(x)$ von Grad d als Operator $\mathscr{H}_{s,t} \to \mathscr{H}_{s-d,t}$.*

Beweis. *i)* Nur Idee für den Spezialfall mit $s = 2k, t = 2m$ nicht negativ und gerade. Dann $(1+|x|^2)^{s/2} = (1+|x|^2)^k$ ist ein Polynom und $(1-\Delta)^{t/2} = (1-\Delta)^m = (1-\Delta)\circ\ldots\circ(1-\Delta)$ ein Differentialoperator.

Deshalb $\|f(x)\|^2_{\mathscr{H}_{s,t}} = \|(1+|x|^2)^k(1-\Delta)^m(f(x))\|_{L^2}$ ist beschränkt durch $C\cdot \sum_{|I|\leqslant 2k, |J|\leqslant 2m} \|x^I\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^J f(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Umgekehrt, für alle $k' \leqslant k$ gilt $\|(1+|x|^2)^{k'}(1-\Delta)^m(f(x))\|_{L^2} \leqslant \|(1+|x|^2)^k(1-\Delta)^m(f(x))\|_{L^2}$. Insbesondere, für $k'=0$ bekommen wir $\|(1-\Delta)^m(f(x))\|_{L^2} \leqslant \|(1+|x|^2)^k(1-\Delta)^m(f(x))\|_{L^2}$. Aber $\|(1-\Delta)^m(f(x))\|_{L^2} = \|(1+|y|^2)^m\hat{f}(y)\|_{L^2}$ und deshalb $\|(1-\Delta)^{m'}(f(x))\|_{L^2} \leqslant \|(1-\Delta)^m(f(x))\|_{L^2}$ für alle $m' \leqslant m$. Außerdem für jedes Monom x^I mit $|I| \leqslant 2k$ gilt $|x^I| \leqslant C\cdot(1+|x|^2)^k$. Ferner ist die Differenz $(1+|x|^2)^k(1-\Delta)^m(f(x)) - (1-\Delta)^m((1+|x|^2)^k f(x))$ die Summe von Termen der Form $C_{I,J}x^I\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^J f(x)$ mit $|I|<2k, |J|<2m$ und ähnlich für $(1+|x|^2)^{k'}x_j(1-\Delta)^m(f(x)) - (1-\Delta)^m((1+|x|^2)^{k'}x_j f(x))$ d. Deshalb kann man die Induktion nach k und m verwenden.

ii) Ähnlich wie im Hilfslemma auf der Seite 62 zeigt man, dass die Funktion $(1+|y|^2)^{-s}$ L^2-integrierbar für $s > n/4$ ist. Dann $\|f(x)\|_{\sup} \leqslant \|\hat{f}(y)\|_{L^1} \overset{*}{\leqslant} \|(1+|y|^2)^s\hat{f}(y)\|_{L^2}\cdot\|(1+|y|^2)^{-s}\|_{L^2} = C_s\cdot\|(1-\Delta)^s f(x)\|_{L^2}$, wobei in $\overset{*}{\leqslant}$ man die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung benutzt. Deshalb $\|x^I\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^J f(x)\|^2_{\sup} \leqslant C_{I,J}\cdot\|x^I\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^J(1-\Delta)^s f(x)\|^2_{L^2}$. Also $f(x)\in\mathscr{S}$ $:\Leftrightarrow$ alle $\|\cdot\|_{\mathscr{S},I,J}$ sind beschränkt $:\Leftrightarrow$ alle $\mathscr{H}_{k,m}$-Normen sind beschränkt $:\Leftrightarrow$ $f(x)\in\cap_{s,t\in\mathbb{R}}\mathscr{H}_{s,t}$.
Umgekehrt, $\varphi\in\mathscr{S}' \Leftrightarrow \varphi:\mathscr{S}\to\mathbb{C}$ ist beschränkt in einer Norm $\|\cdot\|_{\mathscr{S},I,J} \Rightarrow$ ist beschränkt in einer $\mathscr{H}_{k,m}$-Norm $\Rightarrow f(x)\in\cup_{s,t\in\mathbb{R}}\mathscr{H}_{s,t}$.

iii) Wieder betrachten wir nur den Spezialfall $f\in\mathscr{H}_{k,m}$ mit $k,m\in\mathbb{N}$. Dann folgt die Beschränktheit beider Operatoren aus dem Teil *i)*.

Definition 5.13 (Diracsche δ-Funktion)

*Die (Diracsche) δ-**Funktion** mit dem Träger (oder mit dem Pol) in $a \in \mathbb{R}^n$ ist die Distribution δ_a so dass $\langle f(x), \delta_a \rangle := f(a)$ für jedes $f(x) \in \mathscr{S}$.*

Andere Definitionen und Notationen. δ-**Maß, Dirac-Maß, Dirac-Funktion,** $\delta(x)$ für δ_0 und $\delta(x-a)$ für $\delta_a(x)$.

Lemma 5.15 (Eigenschaften von δ-Funktion)

Dies sind die Eigenschaften von δ-Funktion:

(del0) $\langle f(x), \delta_a \rangle = \int f(x) \cdot \delta_a(x)\, d^n x = f(a)$ *(definierende Eigenschaft);*

(del1) $\mathscr{F}(\delta_a) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\mathbf{i}ya}$, *insbesondere* $\mathscr{F}(\delta_0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$ *(Fourier-Transformation von δ-Fktn);*

(del1') $\mathscr{F}(\mathbf{1}) = (2\pi)^{n/2} \cdot \delta_0$ *(Fourier-Transformation von Konstanten);*

(del2) $\mathscr{F}(\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \delta_a) = \frac{(\mathbf{i}y)^I}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\mathbf{i}ya}$, *(Fourier-Transformation von Ableitungen von δ-Fktn);*

(del2') $\mathscr{F}(x^I) = (2\pi)^{n/2} \cdot \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \delta_0$ *(Fourier-Transformation von Polynomen);*

(del3) $\delta_a * f(x) = f(x-a)$ *(Faltung mit δ-Fktn);*

(del4) $\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \delta_0 * f(x) = \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} f(x)$ *(Ableitung als Faltung);*

(del5) $f(x) \cdot \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \delta_a = \sum_{J+K=I} \binom{I}{J,K} \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} f(a) \cdot \frac{\partial^{|K|}}{\partial x^K} \delta_a$ *für jedes $f(x)$ glatt und langsam wachsend.*

Bemerkungen (a). 1 bezeichnet die Konstante Funktion 1.
(b) $\binom{I}{J,K}$ sind die binomialen Koeffizienten: für $I = (i_1, \dots, i_n)$, $J = (j_1, \dots, j_n)$ und $K = (k_1, \dots, k_n)$ mit $I = J + K$ (d.h., $i_a = j_a + k_a$) gilt: $\binom{I}{J,K} = \prod_{a=1}^n \binom{i_a}{j_a}$ und $(x+y)^I := \prod_{a=1}^n (x_a + y_a)^{i_a} = \sum_{J+K=I} \binom{I}{J,K} x^J y^K$. Außerdem gilt die folgende Version von Leibniz-Regel: $\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}(f(x)g(x)) = \sum_{J+K=I} (-1)^{|J|} \binom{I}{J,K} \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} f(x) \cdot \frac{\partial^{|K|}}{\partial x^K} g(x)$.
(c) $\frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} f(a)$ ist die Auswertung der Ableitung von $\frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} f(x)$ an der Stelle $x = a$, dies ist eine *Konstante*. Dagegen sind $\frac{\partial^{|K|}}{\partial x^K} \delta_a$ nicht-konstante Distributionen — Ableitungen von δ_a.

Beweis. Die erste Eigenschaft ist die Definition, die zweite eine triviale Folgerung. Die weiteren Eigenschaft (del1'–del2') bekommt man aus (del1) und die entsprechende Eigenschaften von Fourier-Transformation, insbesondere aus dem Umkehrungssatz 5.4.
(del3): $\delta_a * f(x) = \int \delta_a(y) \cdot f(x-y) d^n x = \langle f(x-y), \delta_a(y) \rangle_y = f(x-y)|_{y=a} = f(x-a)$.
Dabei unterstreicht die Notation $\langle \cdot, \delta_a(y) \rangle_y$, dass man bezüglich die Varieablen $y = (y_1, \dots, y_n)$ rechnet.

(del4): $\delta_a * f(x) = \langle f(x-y), \frac{\partial^{|I|}}{\partial y^I} \delta_a(y) \rangle_y \overset{(1)}{=} \langle \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^I f(x-y), \delta_a(y) \rangle_y = \left(\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} f\right)(x-y)|_{y=a} = \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} f(x-a)$, wobei benutzt man an der Stelle $\overset{(1)}{=}$ die Definition von schwachen Ableitungen.

(del5): Es sei $g(x) \in \mathscr{S}$. Dann $\int (f(x) \cdot \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \delta_a) \cdot g(x) d^n x = \int (f(x) \cdot g(x)) \cdot \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \delta_a d^n x = \int (-1)^{|I|} \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} (f(x) \cdot g(x)) \cdot \delta_a d^n x \overset{(2)}{=} \int (-1)^{|I|} \delta_a \cdot \sum_{J+K=I} \binom{I}{J,K} \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} f(x) \cdot \frac{\partial^{|K|}}{\partial x^K} g(x) d^n x =$

$\sum_{J+K=I}(-1)^{|I|}\binom{I}{J,K}\frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}f(a)\cdot\frac{\partial^{|K|}}{\partial x^K}g(a)=$
$\sum_{J+K=I}(-1)^{|I|}\binom{I}{J,K}\frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}f(a)\cdot\langle\frac{\partial^{|K|}}{\partial x^K}g(x),\delta_a\rangle\overset{(3)}{=}$
$\sum_{J+K=I}(-1)^{|I|-|K|}\binom{I}{J,K}\frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}f(a)\cdot\langle g(x),\frac{\partial^{|K|}}{\partial x^K}\delta_a\rangle=$
$\langle g(x),\sum_{J+K=I}(-1)^{|J|}\binom{I}{J,K}\frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}\bar{f}(a)\cdot\frac{\partial^{|K|}}{\partial x^K}\delta_a\rangle$. Dabei benutzt wir die Leibniz-Regel von oben an der Stelle $\overset{(2)}{=}$ die Definition von schwachen Ableitungen an der Stelle $\overset{(3)}{=}$ und die Gleichung $(-1)^{|I|-|K|}=(-1)^{|J|}$. Die letzte Gleichung liefert den Beweis. □

Lemma 5.16 (Dirac-Funktion und Dirac-Folge)

Es sei $\psi(x)\in C^0(\mathbb{R}^n)$ eine nicht-negative stetige Funktion mit $\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)=1$ und $\varepsilon_\nu>0$ eine Folge mit $\varepsilon_\nu\longrightarrow 0$. Dann konvergiert die Dirac-Folge $\psi_\nu(x)=\varepsilon_\nu^{-n}\psi(\frac{x}{\varepsilon_\nu})$ zu der Dirac-Funktion δ_0 bzgl. der $\mathscr{S}'$-Topologie.

Beweis. Die Konvergenz $\psi_\nu\to\delta_0$ bzgl. der $\mathscr{S}'$-Topologie bedeutet, dass für ein $k\geqslant 0$ hat man die Abschätzung $\big|\langle\psi_\nu-\delta_0,f(x)\rangle\big|\leqslant\alpha_\nu\sum_{|I|+|J|\leqslant k}\|f(x)\|_{\mathscr{S},I,J}$ mit $\alpha_\nu>0$ unabhängig von $f(x)\in\mathscr{S}$ und $\alpha_\nu\to 0$. Es reicht, wenn wir die Norm $\|f(x)\|_{C^1}=\|f(x)\|_{\sup}+\sum_j\|\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\|_{\sup}$ nehmen.
Für $x,v\in\mathbb{R}^n$ betrachtet man die Funktion Hilfsfunktion $\phi(t):=f(x+tv)$ mit $t\in\mathbb{R}$. Dann aus der Newton-Leibniz-Formel und der Kettenregel bekommen wir $f(x+v)-f(x)=\phi(1)-\phi(0)=\int_{t=0}^1\frac{d\phi}{dt}dt=\sum_{j=1}^n v_j\int_{t=0}^1\frac{\partial f}{\partial x_j}f(x+tv)dt$. Dies impliziert die Abschätzung $|f(y)-f(x)|\leqslant|y-x|\cdot\|f(x)\|_{C^1}$.

Nun sei $\eta > 0$ beliebig klein. Dann nach der stetigkein von Lebesgue-Integral (Satz 3.2) existiert $R > 0$ so dass $\int_{B(0,R)} \psi(x) d^n x \geqslant 1 - \eta/3$. Für solch ein R gilt: $\int_{B(0,\varepsilon_\nu R)} \psi_\nu(x) d^n x \geqslant 1 - \eta/3$ und $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon_\nu R)} \psi_\nu(x) d^n x \leqslant \eta/3$. Ferner, $|\langle \psi_\nu - \delta_0, f(x) \rangle| = \left| \int \psi_\nu(x) f(x) d^n x - f(0) \right| = \left| \int \psi_\nu(x)(f(x) - f(0)) d^n x \right| \leqslant \int_{B(0,\varepsilon_\nu R)} \psi_\nu(x) |f(x) - f(0)| d^n x + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon_\nu R)} \psi_\nu(x)(|f(x)| + |f(0)|) d^n x \big|$. Das erste Integral ist abgeschätzt durch $R\varepsilon_\nu \|f(x)\|_{C^1}$, das zweite durch $\frac{2\eta}{3} \|f(x)\|_{\sup}$. Also $\left| \langle \psi_\nu - \delta_0, f(x) \rangle \right| \leqslant (R\varepsilon_\nu + 2\eta/3) \cdot \|f(x)\|_{C^1}$, und die Konstante $R\varepsilon_\nu + 2\eta/3$ ist $\leqslant \eta$ für $\varepsilon_\nu \leqslant \frac{\eta}{3R}$. Dies zeigt die gewünschte Eigenschaft. □

Definition 5.14 (Träger einer Funktion und einer Distribution)

Der **Träger** $\mathrm{supp}(f(x))$ *einer stetigen (z.B., einer glatten) Funktion* $f(x) \in C^0(\mathbb{R}^n)$ *ist die Menge* $\mathrm{supp}(f(x)) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$. *Eine stetige Funktion* $f(x)$ **hat den Träger** *in der Teilmenge* A *falls* $\mathrm{supp}(f(x)) \subset A$, *d.h.* $f(x) = 0$ *für* x *außerhalb* A. *Eine Distribution* $f(x) \in \mathscr{S}'$ **verschwindet** *in einer offenen Menge* U, *falls* $\langle f(x), \varphi(x) \rangle = 0$ *für alle* $\varphi(x) \in \mathscr{S}$ *mit dem Träger in* U. *Der* **Träger** $\mathrm{supp}(f(x))$ *einer Distribution* $f(x) \in \mathscr{S}'$ *ist das Komplement* $\mathbb{R}^n \setminus U_f$ *wobei* U_f *die maximale offene Menge ist, so dass* $f(x)$ *verschwindet in* U_f.

Bemerkung Die Existenz der solchen maximalen Menge U_f folgt aus der nächsten Tatsache: Falls $\{U_\alpha\}$ eine Familie von offenen Mengen ist, so dass $f(x)$ verschwindet in jeder U_α, verschwindet $f(x)$ auch in der Vereinigung $\cup_\alpha U_\alpha$.

Satz 5.17 (Distributionen mit dem Träger in einem Punkt.)

Es sei $\varphi(x) \in \mathscr{S}'$ eine Distribution mit dem Träger in $0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert $k \in \mathbb{N}$ so dass $\varphi(x) = \sum_{|I| \leqslant k} c_I \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \delta_0$ mit geeigneten Konstanten c_I.

Beweis. Nach der Definition 5.8 ist die Distribution φ eine stetige lineare Abbildung $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$. Dies bedeutet, dass es $k \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ existieren, so dass $|\varphi(f)| \leqslant C \cdot \sum_{|I|+|J| \leqslant k} \|f(x)\|_{\mathscr{S},I,J}$ für alle $f(x) \in \mathscr{S}$. (Hier ist $\varphi(f)$ die Auswertung von φ auf $f(x) \in \mathscr{S}$.) Die Bedingung auf den Träger von φ bedeutet, dass $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ für alle Funktionen $f_1(x), f_2(x) \in \mathscr{S}$, die gleich in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ sind.

Es sei $\psi(x)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften: $\psi(x)$ ist glatt, identisch 1 im Einheitsball $B(0,1) =: B_1$ und identisch 0 außerhalb vom Ball $B(0,2) =: B_2$. Für $t \in (0,1]$ definieren wir die Funktionen $\psi_t(x) := \psi(\frac{x}{t})$. Aus dem Kettenregel folgt die Gleichheit $\|\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \psi_t(x)\|_{\sup} = t^{-|I|} \cdot \|\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \psi(x)\|_{\sup}$.

Ferner sei $f(x) \in \mathscr{S}$ eine beliebige Funktion aus $\mathscr{S}$. Für $k \in \mathbb{N}$ wie oben sei $T_k(f)$ das Taylor-Polynom von $f(x)$ von Grad k an der Stelle $x = 0$. Dann verhält sich die Funktion $F(x) - T_k(f)(x)$ in $x = 0$ als ein Polynom von Grad $\geqslant k+1$ und deshalb $\left|\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}\big(f(x) - T_k(f)(x)\big)\right| \leqslant C \cdot |x|^{k+1-|I|} \cdot \|f(x)\|_{C^k}$. Es folgt, dass $\|\big(f(x) - T_k(f)(x)\big)\psi_t(x)\|_{C^k}$ verschwinden als t gegen 0 läuft. Anderseits, sind die Funktionen $(f(x) - T_k(f)(x))\psi_t(x)$ mit verschiedenen t gleich in einer Umgebung von 0, und deshalb ist die Auswertung $\varphi\big((f(x) - T_k(f)(x))\psi_t(x)\big)$ unabhängig von $t > 0$.

Aus dieser Tatsachen schießt man die Gleichheiten $\varphi(f) = \varphi(\psi_t \cdot f) = \varphi(\psi_t T_k(f)) = \varphi(\psi_1 T_k(f))$. (Die letzte wegen der Unabhängigkeit von t.) Da $\psi_1(x) = \psi(x)$ fest ist, hängt $\varphi(f) = \varphi(\psi T_k(f))$ nur von Ableitungen von $f(x)$ von Grad $\leqslant k$ an der Stelle $x = 0$ ab. Dies bedeutet, dass φ die gewünschte Form $\varphi(x) = \sum_{|I| \leqslant k} c_I \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \delta_0$ hat. □

Anwendung von Fourier-Transformation. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. [3]

Definition 5.15 (Lineare partielle Differentialgleichungen)

Ein **lineare partieller Differentialoperator** *(kurz: PDOp) in einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ (mit glatten Koeffizienten) ist die Abbildung $\mathcal{L} : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ der Form $\mathcal{L}(u) = \sum_{|I| \leqslant k} a_I(x) \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} u(x)$. Die Funktionen $a_I(x)$ sind die* **Koeffizienten** *von $\mathcal{L}$, die maximale Ordnung der eingezogenen partiellen Ableitungen heißt die* **Ordnung** *von $\mathcal{L}$. Eine* **lineare partielle Differentialgleichung** *(kurz: part. DGl) ist die Gleichung der Form $\mathcal{L}(u(x)) = f(x)$ mit unbekannter Funktion $u(x)$ und gegebenen $a_I(x)$ und $f(x)$. Die Funktion $u(x)$ kann vektorwertig sein, dann sind die Koeffizienten matrizenwertig, und man spricht von einem* **linearen System partieller DGl** *oder von einem* **part. DGl-System**.

Wir möchten die Fourier-Transformation zur Lösung einiger Spezieller PDGl in dem ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ anwenden und einschränken uns zu dem Fall wenn die Koeffizienten konstant oder polynimial sind.

[3] Siehe auch: Fischer/Kaul, Mathematik für Physiker 2, § 16,17

Beispiele. 1. Der Laplace-Operator $\Delta u := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ (siehe Definition 5.10) ist ein der wichtigsten Operatoren. Die Lösungen der DGl $\Delta u = 0$ (in einem Gebiet U) heißen **harmonische Funktionen**. Die Gleichung $\Delta u(x) = f(x)$ heißt die **Poisson-Gleichung**.
2. Es sei Δ der Laplace-Operator bzgl. der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$. Die **Wärmeleitungsgleichung** ist die DGl $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = v^2 \Delta u(x,t)$ auf eine Funktion $u(x,t) = u(x_1, \ldots, x_n; t)$.
3. Die **Wellengleichung** ist die DGl $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = v^2 \Delta u(x,t)$ auf eine Funktion $u(x,t) = u(x_1, \ldots, x_n; t)$.
4. Es sei x, y die reellen Koordinaten in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und $z = x + \mathbf{i}y$ die komplexe Koordinate. Der Cauchy-Riemann Operator ist definiert durch $\bar{\partial} f := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y})$. Die Lösungen $f(z)$ der **Cauchy-Riemann Gleichung** $\bar{\partial} f = 0$ heißen **holomorphe** Funktionen.

Lemma 5.18 (Fortsetzung von Differentialoperatoren)

Es sei $\mathcal{L} = \sum_{|I| \leqslant k} a_I(x) \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}$ ein DOp mit glatten langsam wachsenden Koeffizienten. Dann lässt sich $\mathcal{L}$ eindeutig zu einem stetigen linearen Operator $\mathcal{L} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ fortsetzen.

Beweis. Man benutzt für die Fortsetzung die gleiche Formel $\mathcal{L}\varphi = \sum_{|I| \leqslant k} a_I(x) \frac{\partial^{|I|}\varphi}{\partial x^I}$. Um zu zeigen, dass $\mathcal{L} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ wohl-definiert ist, wendet man das Lemma 5.13 an. □

Notation. Eine Lösung $u(x)$ der Gleichung $\mathcal{L}u(x) = f(x)$ aus dem Raum $\mathscr{S}'$ heißt eine **schwache Lösung**.

Satz 5.19 (Harmonische Funktionen in $\mathbb{R}^n$.)

Jede schwache Lösung $u(x) \in \mathscr{S}'$ der Laplace-Gleichung $\Delta u(x) = 0$ ist ein Polynom. Jeder beschränkte Lösung der Gleichung $\Delta u(x) = 0$ ist eine Konstante. Für jedes $1 \leqslant p < \infty$ gibt es keine harmonische Funktion, die L^p-integrierbar ist.

Beweis. Es sei $u(x) \in \mathscr{S}'$ eine nicht-triviale Lösung von $\Delta u(x) = 0$ und $\hat{u}(y)$ die Fourier-Transformierte von $u(x)$. Dann $|y|^2 \cdot \hat{u}(y) = 0$. Es sei $f(y) \in \mathscr{S}$ eine Funktion, so dass die identisch verschwindet in einer Umgebung von 0. Dies bedeutet, dass $0 \notin \mathrm{supp}(f(y))$. Dann aber $g(y) := |y|^{-2} \cdot \hat{u}(y)$ liegt auch in $\mathscr{S}$ und $0 \notin \mathrm{supp}(g(y))$. Deshalb $\int f(y)\hat{u}(y)d^n y = \int g(y) \cdot |y|^2 \cdot \hat{u}(y) d^n y = 0$. Also $\langle f(y), \hat{u}(y) \rangle = 0$ für alle $f(y) \in \mathscr{S}$ mit dem Träger in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Also $\mathrm{supp}(\hat{u}(y)) = \{0\}$ und damit $\hat{u}(y) = \sum_{|I| \leqslant k} C_I \frac{\partial^{|I|}}{\partial y^I} \delta_0(y)$ nach dem Satz 5.17. Folglich $u(x) = \mathscr{F}^{-1}(\hat{u})$ ist ein Polynom nach dem Lemma 5.15.
Zwei weitere Aussagen folgen aus den Folgenden Tatsachen: Erstens, ist jedes beschränkte Polynom eine Konstante. Zweitens, ist kein nicht-triviales Polynom L^p-integrierbar in $\mathbb{R}^n$. $\square$

Satz 5.20 (Fundamenallösung)

Es sei $\mathcal{L}$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und $F(x) \in \mathscr{S}'$ eine Lösung der Gleichung $\mathcal{L}(F) = \delta_0$. Dann für jedes $f(x) \in \mathscr{S}$ löst die Funktion $u_f(x) := f(x) * F(x)$ die Gleichung $\mathcal{L}(u) = f(x)$.

Beweis. Hilfslemma 1. Es sei $\varphi \in \mathscr{S}'$ eine Distribution so dass die Fourier-Transformierte $\hat{\varphi}(y)$ is glatt und langsam wachsend. Dann für jede Distribution $\psi(x) \in \mathscr{S}'$ ist die Faltung $\psi * \varphi(x)$ wohl-definiert und erfüllt die übliche Eigenschaften der Faltung.

Beweis des Hilfslemmas 1. Für jede *glatte* Funktion $\psi(x) \in \mathscr{S}$ ist die Faltung $\psi * \varphi$ wohldefiniert und es gilt: $\mathcal{F}(\psi * \varphi)(y) = (2\pi)^{n/2} \hat{\psi}(y) \cdot \hat{\varphi}(y)$. Deshalb kann man die Faltung $\psi * \varphi(x)$ durch $\psi * \varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}\big((2\pi)^{n/2} \hat{\psi}(y) \cdot \hat{\varphi}(y)\big)$ definieren. Da die Fourier-Transformierte $\hat{\psi}(y)$ einer Distribution $\psi(x) \in \mathscr{S}'$ auch eine Distribution ist, und das Produkt $\hat{\psi}(y) \cdot \hat{\varphi}(y)$ einer Distribution und einer glatten langsam wachsenden Funktion wohldefiniert ist, so ist die Definition der Faltung $\psi * \varphi(x)$ auch wohldefiniert. Weitere Eigenschaften der Faltung, insbesondere Assoziativität und Kommutativität, folgen aus entsprechenden Eigenschaften des Produktes $\hat{\psi}(y) \cdot \hat{\varphi}(y)$.

Hilfslemma 2. Es sei $\varphi := \mathcal{L}(\delta_0)$. Dann für jede Distribution $g(x) \in \mathscr{S}$ gilt: $\mathcal{L}(g(x)) = g * \varphi(x)$.

Beweis des Hilfslemmas 2. Nach Voraussetzungen ist $\varphi = \mathcal{L}(\delta_0)$ eine Summe von Ableitungen von δ-Funktion. Lemma 5.13 besagt, dass die Fourier-Transformierte $\hat{\varphi}$ von φ ein Polynom ist, und deshalb glatt und langsam wachsend. Nach Hilfslemma 1 ist die Faltung von φ mit jeder Distribution wohl-definiert. Aus dem Lemma 5.13 (Seite 68) folgt, dass für jede Ableitung $\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \delta_0$ von δ-Funktion ist ihre Faltung mit jeder Distribution $\psi(x)$ die ensprechende Ableitung von $\psi(x)$, $\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}\delta_0 * \psi(x) = \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}\psi(x)$. Deshalb gilt das Hilfslemma für die Ableitungsoperatoren $\mathcal{L}(u(x)) = \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} u(x)$. Die Summierung beweist das Hilfslemma.

Beweis des Satzes. Für die Funktion $F(x)$ wie im Satz und eine beliebige Funktion $f(x) \in \mathscr{S}$ bekommen wir $\mathcal{L}(F(x) * f(x)) = \mathcal{L}(\delta_0) * (F(x) * f(x)) = (\mathcal{L}(\delta_0) * F(x)) * f(x) = \mathcal{L}(F(x)) * f(x)) = \delta_0 * f(x) = f(x)$. □

Definition 5.16 (Fundamentallösung)

Es sei $\mathcal{L}$ ein DiffOp $\mathcal{L}$ mit konstanten Koeffizienten. Eine Distribution $F(x) \in \mathscr{S}'$ so dass $\mathcal{L}(F(x)) = \delta_0$ heißt **Fundamentallösung** *von $\mathcal{L}$.*

Satz 5.21 (Fundamentallösung von Laplace-Operator)

Die Fundamentallösung von Laplace-Operator $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ in $\mathbb{R}^n$ ist:

$F(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|$ in Dimension $n = 2$;
$F(x) = \frac{1}{c_n |x|^{n-2}}$ in Dimension $n \geqslant 3$.

Beweis. Es seien (r, φ) Polarkoortinaten in $\mathbb{R}^2$. Dann $\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) u = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) u$. Für jede $g(x) \in \mathscr{S}$ hat man $\langle \Delta \log r, g\rangle = \langle \log r, \Delta g\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \log r\, \Delta g\; r dr\, d\varphi = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r \log r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}\right) dr\, d\varphi$.

Nach der Newton-Leibniz Formel (Hauptsatz der Integralrechnung)
$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} d\varphi = \left[\frac{\partial g(r,\varphi)}{\partial \varphi}\right]_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} g(r, 2\pi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} g(r, 0) = 0$. Anderseits
$\int_{r=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \log r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial g}{\partial r}\right) dr\, d\varphi = 2\pi \int_{r=0}^{\infty} \log r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial g}{\partial r}\right)$

VI. Integration über Kurven und Flächen in $\mathbb{R}^3$. Der Satz von Stokes. [4]

Definition 6.1

Eine (C^k-glatte) **parametrisierte Kurve** *in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige (bzw. C^k-glatte) Abblildung $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Für eine C^1-glatte Kurve $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ defieniert man das Tangentualvektorfeld $\gamma'(t)$ als die Ableitung von der (vektorwertigen) Funktion $\gamma(t)$. Jedes Tangentialvektor $\gamma'(t)$ soll mit dem Fußpunkt $\gamma(t)$ vorgestellt werden.*

Beispiel von Peano.

Peano hat ein Beispiel einer stegigen Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ konstruiert, so dass das Bild $\gamma([0,1])$ ein Quadrat ist. Dies widerspricht der Vorstellung von einer Kurve als 1-dimensionales Objekt.

Definition 6.2 (Kurvenlänge)

Für jede C^1-Kurve $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist die **Länge** *als das Integral $L(\gamma) := \int_{t=a}^{b} |\gamma'(t)| dt$ definiert. Damit ist die Kurvenlänge (oder auch Bogenlänge) ein stetiges Maß auf dem Parameterintervall $[a,b]$.*

[4] Rererenz: Königsberger, Analysis 2, § 11,13

Definition 6.3

Eine **Umparametrisierung** *einer C^k-glatten Kurve ist eine C^k-glatte Abblildung $\varphi(\tau) : [a_1, b_1] \to [a, b]$ mit $\varphi'(\tau) \neq 0$. Die Umparametrisierung $t = \varphi(\tau)$ ist* **orientierungserhaltend** *in dem Fall $\varphi'(\tau) > 0$ und* **orientierungsumkehrend** *in dem Fall $\varphi'(\tau) < 0$.*
Ein **natürlicher** *(auch Bogenlänge-) Parameter s auf dem Parameterintervall $[a, b]$ ist eine Funktion $s(t)$ mit $\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)|$.*

Satz 6.1

Es sei U ein Bereich in $\mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$ und $f = f(x, y) : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Abbildung so dass $f(x, c{\cdot}y) = c{\cdot}f(x, y)$ für alle $c > 0$. Dann ist das Integral $\int_I f(\gamma(t); \gamma'(t))dt$ unabhängig von orientirungserhaltenden Umparametrisierungen. Es gelte zusätzlich $f(x, -y) = f(x, y)$ (bzw. $f(x, -y) = -f(x, y)$). Dann wird Integral $\int_I f(\gamma(t); \gamma'(t))dt$ bei der Parametrisierungsumkehrung erhalten (bzw. ändert das Vorzeihchen).

Beweis. Es sei $t = \psi(\tau)$ eine Umparametrisierung mit $\tau \in J = [a', b']$. Dann nach dem Substitutionssatz (oder nach dem Transformationssatz) bekommt man
$\int_I f(\gamma(t); \frac{d\gamma}{dt}(t))dt = \int_J f(\gamma(\psi(\tau))\frac{d\gamma}{dt}(\psi(\tau)))|\frac{d\psi}{d\tau}|d\tau = \int_J f(\gamma(\psi(\tau))\frac{d(\gamma\circ\psi)}{d\tau}(\psi(\tau)))d\tau$
$= \int_J f(\tilde\gamma(\tau); \frac{d\tilde\gamma}{d\tau}(\tau))d\tau$, wobei $\tilde\gamma(\tau) = \gamma \circ \psi(\tau) = \gamma(\psi(\tau))$.
Das Verhalten von $\int_I f(\gamma(t); \frac{d\gamma}{dt}(t))dt$ bei der Parametrisierungsumkehrung $\gamma(t) \mapsto \gamma((a + b) - t)$ folgt direkt aus der Definition des Riemannschen Integral. In der Tat, jede Partition mit Stützstellen wird in eine andere Partition überführt, so dass die Riemannsche Summe beibehalten wird (oder entsprechend wechselt das Vorzeichen).

Beispiele. 1. Es sei $f(x,y)=|y|$. Dann ist das Integral $\int_I f(\gamma(t);\frac{d\gamma}{dt}(t))dt$ die Länge der Kurve $\gamma(t)$, die wie erwartet unabhängig von der Parametrisierung ist.
2. Es sei $\varphi(x)$ eine Funktion und $f(x,y)=\varphi(x)\cdot|y|$. Dann bleibt ist das Integral $\int_I f(\gamma(t);\frac{d\gamma}{dt}(t))dt$ unverändert bei allen Umparametrisierungen.
3. Es sei $\vec{F}(x): U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, d.h., eine Vektorwertige Funktion. Setze $f(x,y):=\vec{F}(x)\cdot y$ (Skalarprodukt). Dann wird das Integral $\int_I f(\gamma(t);\frac{d\gamma}{dt}(t))dt$ bei orientirungserhaltenden Umparametrisierungen erhalten, wechselt aber das Vorzeihchen bei der Parametrisierungsumkehrung.