Klausur zur Mathematik III für Studierende der Geophysik/Ozeanographie, Meteorologie und der Physik, A

14.02.08

Name, Vorname:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Übungshelfer:

Gruppennummer:

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen!
Keine Angabe des Übungshelfers oder der Gruppen-Nummer bedeutet, dass Sie auf Bonuspunkte verzichten wollen!
Bei den Aufgaben 1-4 sind schriftliche Zwischenrechnungen und Begründungen mit abzugeben!

Aufgabe 1: (35 Punkte)
Berechnen sie das Volumen der Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$, die durch Ebenen $x = 1$, $x = 4$, $y = 1$, $y = 2$, $z = 1$ und die Fläche $z = x^3 + y$ begrenzt wird.

Aufgabe 2: (40 Punkte)
Sei $\omega = y^2 xz dx \wedge dz$. Berechnen Sie

$$\int_{S^2} \omega,$$

direkt und mit dem Satz von Stokes.

Aufgabe 3: (35 Punkte)
Betrachten Sie die Doppelpyramide P, deren Eckpunkte im $\mathbb{R}^3$ gegeben sind durch die Punkte $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,-1)$, $(0,0,-1)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_P (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

(Dies ist das Trägheitsmoment von P bei Rotation um die z-Achse.)

Aufgabe 4: (30 Punkte)
Betrachten Sie die Differentialform $\omega = \sin x dx \wedge dy + y dx \wedge dz + x dy \wedge dz$. Überprüfen Sie, dass ω geschlossen ist und finden Sie eine 1-Form η mit $d\eta = \omega$.

Aufgabe 5: (20 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Ist f stetig und $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, so ist $f \circ \Phi$ integrierbar.	
Ist f eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, so ist $f \circ \Phi$ integrierbar.	
Ist f integrierbar und $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ total differenzierbar, so ist $f \circ \Phi$ integrierbar und es gilt: $\int f \circ \Phi(x) \lvert \det d\Phi(x) \rvert \, dx = \int f(y)\, dy$.	

Aufgabe 6: (20 Punkte)
Welche der folgenden Mengen A sind Nullmengen?

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq z^2, xz > 0\}$	
$A = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \cos \frac{1}{x} \geq 1\}$	
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = \tan x + e^x\}$	
$A = \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 + \ldots + x_n = x_1 x_2 + x_1 x_n\}$	

Aufgabe 7: (20 Punkte)
Welche der folgenden Abbildungen $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sind Distributionen?

$T(f) = \lim\limits_{n \to \infty} \int \frac{\sin(nx)}{n} f(x)\, dx$	
$T(f) = \int \lvert x \rvert f(x)\, dx$	
$T(f) = \sin f(1)$	
$T(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tanh n\, f(n^2)$	

Bitte heften Sie diesen Zettel mit Ihren Lösungsblättern zusammen.

Abgabe: 90 Minuten nach Beginn

Klausur zur Mathematik III für Studierende der Geophysik/Ozeanographie, Meteorologie und der Physik, B

14.02.08

Name, Vorname:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Übungshelfer:

Gruppennummer:

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen!
Keine Angabe des Übungshelfers oder der Gruppen-Nummer bedeutet, dass Sie auf Bonuspunkte verzichten wollen!
Bei den Aufgaben 1-4 sind schriftliche Zwischenrechnungen und Begründungen mit abzugeben!

Aufgabe 1: (35 Punkte)
Berechnen sie das Volumen der Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$, die durch Ebenen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z + x + y = 0$ und die Fläche $z = x^3 + y$ begrenzt wird.

Aufgabe 2: (40 Punkte)
Sei $\omega = xzdy \wedge dz$. Berechnen Sie

$$\int_{S^2} \omega,$$

direkt und mit dem Satz von Stokes.

Aufgabe 3: (35 Punkte)
Betrachten Sie den Würfel W mit Kantenlänge 2, dessen Eckpunkte im $\mathbb{R}^3$ gegeben sind durch die Punkte $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,-1,-1)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_W ((x-y)^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

(Dies ist das Trägheitmoment bei Rotation um die Achse $x = y$, $z = 0$.)

Aufgabe 4: (30 Punkte)
Betrachten Sie die Differentialform $\omega = e^y dx \wedge dy + \cos z dx \wedge dz + y^2 z dy \wedge dz$. Überprüfen Sie, dass ω geschlossen ist und finden Sie eine 1-Form η mit $d\eta = \omega$.

Aufgabe 5: (20 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

Ist f integrierbar, so ist für $y \in \mathbb{R}^m$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ integrierbar und es gilt: $\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy\right) dx$.	
Ist f stetig, so ist für $y \in \mathbb{R}^m$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ integrierbar und es gilt: $\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy\right) dx$	
Wenn $\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy\right) dx$ und $\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\right) dy$ existieren, ist f integrierbar.	

Aufgabe 6: (20 Punkte)
Welche der folgenden Mengen A sind keine Nullmengen?

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1, xz > 0\}$	
$A = \{x \in \mathbb{R}, x \sin \frac{1}{x} \geq 0\}$	
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = \sin x \cdot \cosh x\}$	
$A = \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 + \ldots + x_n \neq x_1 \cdot \cdots \cdot x_n\}$	

Aufgabe 7: (20 Punkte)
Welche der folgenden Abbildungen $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sind Distributionen?

$T(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n f(x)\,dx$	
$T(f) = \int \lvert \sin x \rvert f''(x)\,dx$	
$T(f) = \tanh 3 \cdot f'(\sin 1)$	
$T(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$	

Bitte heften Sie diesen Zettel mit Ihren Lösungsblättern zusammen.

Abgabe: 90 Minuten nach Beginn

Wiederholungsklausur zur Mathematik III für Studierende der Geophysik/Ozeanographie, Meteorologie und der Physik

20.03.08

Name, Vorname:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Übungshelfer:

Gruppennummer:

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen!

Keine Angabe des Übungshelfers oder der Gruppen-Nummer bedeutet, dass Sie auf Bonuspunkte verzichten wollen!

Bei den Aufgaben 1-4 sind schriftliche Zwischenrechnungen und Begründungen mit abzugeben!

Aufgabe 1: (35 Punkte)
Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion, die definiert ist durch: $f(x) = \pi - x$, $x \in [0, \pi)$, und $f(x) = x - \pi$, für $x \in [\pi, 2\pi)$. Ist ihre Stammfunktion wieder 2π-periodisch?

Aufgabe 2: (35 Punkte)
Gegeben sei ein Teil H_1 des einschaligen Hyperboloids im $\mathbb{R}^3$, $H_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x^2 + y^2 - z^2 = 1,\, |z| \leq \sinh 1\}$ und die 2-Form $\omega = x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz$. Berechnen Sie

$$\int_{H_1} \omega$$

unter Benutzung der Parametrisierung $\Psi : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$,
$\Psi(s,t) = (\sin s \cosh t, \cos s \cosh t, \sinh t)$.

Aufgabe 3: (35 Punkte)
Gegeben sei die Menge $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$
Berechnen Sie

$$\int_A xyz\,dx\,dy\,dz.$$

Aufgabe 4: (35 Punkte)
Betrachten Sie Kugel $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius 2 um den Ursprung. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_K \left((x-2)^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz.$$

(Trägheitsmoment der Kugel bei Rotation um die die Parallele zur z-Achse durch $(2,0,0)$.)

Aufgabe 5: (20 Punkte)

Es gilt:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es eine Folge ϕ_k von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger gibt mit $\lim\limits_{k\to\infty} \\|f-\phi\\|_1 = 0$	
Sei $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, dann existiert eine integrierbare Grenzfunktion.	
Sei $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, wobei die Folge $\int f_k$ beschränkt ist, dann existiert eine integrierbare Grenzfunktion.	

Aufgabe 6: (20 Punkte)

Folgende Aussagen über die gegebenen Differentialformen sind richtig:

Sei $\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$ auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Dann ist ω geschlossen.	
Sei $\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$ auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Dann ist ω exakt	
Sei $\omega = x^2yzdx + xy^2zdy + xyz^2dz$ auf $\mathbb{R}^3$. Dann ist ω geschlossen.	

Aufgabe 7: (20 Punkte)

Die folgenden Abbildungen $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sind Distributionen:

$T(f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)$	
$T(f) = e^{f(0)}$	
$T(f) = \int_0^2 f(x-\pi)\,dx$	
$T(f) = f'(e) - \lvert f(3)\rvert$	

Bitte heften Sie diesen Zettel mit Ihren Lösungsblättern zusammen.

Abgabe: 90 Minuten nach Beginn