Mathematik für Physiker III

Dr. Vsevolod Shevchishin

Klausur am 11.02.2010

Bearbeitungszeit: 120min

Name, Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Schriftliche Hilfsmittel (Bücher, Skript, usw.) sind nicht zugelassen!

Punktezahl:

A1i	A1ii	A2	A3i	A3ii	A4	A5	A6	A7	Σ

Note nach Klausurpunkten:

Name, Vorname:. . . . .**Matrikel-Nr.:**. . . . .

Aufgabe 1. (20+20 Punkte.)

Eine Schale S hat die Form eines Paraboloids in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Gleichung $z = x^2 + y^2$ und beschränkt von oben durch die Ebene $z = 4$.

A1i. Berechnen Sie die Oberfläche der Schale S.

A1ii. Berechnen Sie den Inhalt der Schale S, d.h., das Volumen des Gebietes $G := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 4\}$.

Name, Vorname:.......................... **Matrikel-Nr.:**...........................

Aufgabe 2. (20 Punkte.)

Eine Bessel-Funktion $J_a(x)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 J_a(x)}{dx^2} + x \frac{dJ_a(x)}{dx} + (x^2 - a^2) J_a(x) = 0$$

mit $a \in \mathbb{R}$ konstant. Berechnen Sie die Differentialgleichung, die die Fourier-Transformierte $\hat{J}_a(y)$ erfüllt.

(Hinweis: Beide Funktionen $J_a(x)$ und $\hat{J}_a(y)$ sind glatt und liegen im Schwartzschen Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Sie brauchen nicht, diese Tatsachen zu beweisen).

Name, Vorname:.............................**Matrikel-Nr.:**............................

Aufgabe 3. (20+20 Punkte.)
Es seien (r, φ) die Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \mathsf{arctan}\frac{y}{x}$, und $\alpha := r^4 d\varphi$ eine 1-Form.

A3i. Berechnen Sie die Darstellung der Form α in den Euklidischen Koordinaten (x, y) und **dann** das Differential $d\alpha$.

A3ii. Berechnen Sie das Differential $d\alpha$ und **dann** die Darstellung der Form $d\alpha$ in den Euklidischen Koordinaten (x, y).

Name, Vorname:.......................... **Matrikel-Nr.:**...........................

Aufgabe 4. (30 Punkte.)
Berechnen Sie das Integral der Form $\alpha = x^2 z\, dx \wedge dy$ über der Einheitssphäre S^2 in $\mathbb{R}^3$ direkt und mit der Hilfe des Stokes-Satzes.
(Hinweis: Die induzierte Orientierung auf der Sphäre S^2 kann durch das Koordinatensystem (θ, φ) gegeben werden, wobei (r, θ, φ) die Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$ sind.)

Name, Vorname:............................**Matrikel-Nr.:**............................

Aufgabe 5. (25 Punkte.)

Es gilt das Folgende:

Jede abzählbare Menge in $\mathbb{R}$ ist eine Nullmenge.	
Jede Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist abzählbar.	
$\mathbb{R}$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$.	

Aufgabe 6. (25 Punkte.)

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ nicht negative Lebesgue-integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Faltung $f * g$ auch eine Lebesgue-integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist.
(Hinweis: Benutzen Sie den Fubini-Satz.)

Name, Vorname:.......................... **Matrikel-Nr.:**..........................

Aufgabe 7. (20 Punkte.)

Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ vom Vektorfeld $\vec{F} = (2y^2, x - z, x + z)$ über der Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (t^2, t, t^3)$.

Schmierpapier