Mathematik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 9

Abgabetermin: 5. Januar 2010 in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Zusatzpunkte.)

Berechnen Sie das Volumen des 4-dimensionalen Schneeballs von Radius R. Benutzen Sie dabei statt Euklidischen Koordinaten (x_1, y_1, x_2, y_2) die folgenden Koordinaten: $(r, \varphi_1, \varphi_2, \psi)$: $x_1 = r\cos\varphi_1\cos\psi$, $y_1 = r\sin\varphi_1\cos\psi$, $x_2 = r\cos\varphi_2\sin\psi$, $y_2 = r\sin\varphi_2\sin\psi$.

Aufgabe 2. (4 Zusatzpunkte.)

Eine magische Kristallkugel K muss den Radius 1 und die Dichte $\rho_K = 1 - r^2$ haben, wobei r der Abstand von Zentrum von K ist. Bei einem Nachahmungsversuch hat ein Zauberlehrling einen homogenen Ball B (Dichte $\sigma = konst$) erschaffen, der die gleichen Gewicht und Drehmomentum wie Kristallkugel K hat. Wie groß ist der von Lehrling erschaffene Ball? (Hinweise: Das Drehmomentum eines Körpers $G \subset \mathbb{R}^3$ von Dichte ρ_G mit Schwerpunkt in $0 \in \mathbb{R}^3$ ist die Matrix D_{ij} mit Einträgen $D_{ij} = \int_G \rho_G(x) x_i x_j d^3x$.)

Aufgabe 3. (8 Zusatzpunkte.)

Der Bart von Weihnachtsmann wächst während des Jahres immer schneller und hat die Länge $L(x) = x^2$, wird aber am letzten Jahrestag vollständig rasiert.

A3.i (4 Zusatzpunkte.) Berechnen Sie die schwache Ableitung der Längefunktion $L(x)$.

A3.ii (4 Zusatzpunkte.) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Längefunktion $L(x)$. (Hinweis: Hier $L(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0, 365]$ und 0 sonst.).

Aufgabe 4. (4 Zusatzpunkte.)

Die Funktion $u(x)$ erfüllt die Differentialgleichung $x^2 u''(x) + 3xu'(x) + 2u(x) = 0$. Welche Differentialgleichung erfüllt die Fourier-Transformierte $\hat{u}(y)$?

Aufgabe 5. (4 Zusatzpunkte.)

Finden Sie die Bedingungen auf Koeffizienten $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$, so dass eine Distribution $f = \sum\limits_{\alpha+\beta\leqslant 2} c_{\alpha\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial^\alpha x \partial^\beta y} \delta_0$ in $\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten (x, y) die Gleichung $(x - \mathrm{i}y) \cdot f = 0$ erfüllt, und berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\xi, \eta)$.

Aufgabe 6. (4 Zusatzpunkte.)

Unter welchen Bedingungen auf Koeffizienten löst die Funktion $e^{\omega t + a_1 x + a_2 y + a_3 z}$ die Wellengleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - v^2 \Delta u = 0$? (Hinweis: $\Delta u := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u$ ist der Laplace-Operator in $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x, y, z)).