Mathematatik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 8

Abgabetermin: 15. Dezember in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte.)

Berechnen Sie die schwache Ableitung $f'(x)$ der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

und die Fourier-Transformierte von $f'(x)$.

Aufgabe 2. (4 Punkte + 4 Zusatzpunkte.)

A2.i (4 Punkte.) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$. (Hinweis: Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des Produktes $(x^2 + a^2)f_a(x)$ und finden Sie eine Differentialgleichung, die Fourier-Transformierte $\hat{f}_a(y)$ erfüllt. Finden Sie die allgemeine Eigenschaft $\lim_{y\to\pm\infty} \hat{f}_a(y) = 0$.)

A2.ii (4 Zusatzpunkte.) Zeigen Sie die Gleichung $f_a * f_b(x) = f_{a+b}(x)$.

Aufgabe 3. (8 Punkte.)

Zur Beschreibung der Verbreitung von Tsunami-Wellen nach einem Erdbebenstoß betrachtet man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) + 2\sigma \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) \qquad \sigma > 0, v > 0 \tag{DGl}$$

mit der Anfangsbedingungen

$$f(x,0) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t} f(x,0) = \chi_{[-a,a]} \tag{AB}$$

A3.i (4 Punkte.) Berechnen Sie das entsprechende Anfangswertproblem (DGL+AB) für die räumliche Fourier-Transformierte $\hat{f}(y,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x,t) e^{-\mathrm{i}xy} dx$ und finden Sie die Lösung.

A3.ii (4 Punkte.) Für welche y ist die Lösung $\hat{f}(y,t)$ zeitlich wellenartig? Finden Sie die entsprechende zeitliche Frequenz $\omega(y)$ und die Dämpfung $\tau(y)$.
(Hinweis: Eine Lösung $f(t)$ von DGl $f'' + 2\sigma f' + v^2 f = 0$ mit reellen Parametern $\sigma > 0, v$ ist wellenartig falls sie die Form $f(t) = A_+ e^{-\tau t} e^{+\mathrm{i}\omega t} + A_- e^{-\tau t} e^{-\mathrm{i}\omega t}$ mit $\tau > 0, \omega > 0$ hat. In diesem Fall ist ω die Frequenz und $\tau > 0$ die Dämpfung.)