Mathematik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 7

Abgabetermin: 8. Dezember in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte.)

Es seien

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} -\lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{mit } \lambda > 0.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{f}(x) = f'(x)$ fast überall, dass die Fourier-Transformationen von $f(x)$ und $\tilde{f}(x)$ wohl-definiert sind, aber die Formel

$$\mathscr{F}(\tilde{f})(y) = \mathrm{i} y \mathscr{F}(f)(y)$$

falsch ist. Welche Bedingung an $f(x)$ ist nicht erfüllt?

Aufgabe 2. (4 Punkte.)

Berechnen Sie die Faltung der Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-\mu x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

mit $\lambda, \mu > 0$ direkt und mit der Hilfe der Fourier-Transformation.
(Hinweis: Beachten Sie das Integrationsinterval bei Faltung.)

Aufgabe 3. (8 Punkte.)

Eine stetige Zufallsvariable X wird durch eine Verteilungsdichte $\rho(X) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ gegeben, so dass $\int_{X \in \mathbb{R}} \rho(X)\, dX = 1$. Für so eine Variable definiert man den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ als das Integral $\int_{X \in \mathbb{R}} X \rho(X)\, dX$ und die Standartabweichung $\sigma(X)$ durch

$$\sigma(X) := \left(\int_{X \in \mathbb{R}} (X - \mathbb{E}(X))^2 \rho(X)\, dX \right)^{1/2}$$

Die Summe zweier *unabhängiger* stetiger Zufallsvariablen X_1, X_2 mit Dichten ρ_{X_1}, ρ_{X_2} ist eine Zufallsvariable $X = X_1 + X_2$ mit der Dichte $\rho_X = \rho_{X_1} * \rho_{X_2}$ (Faltung der Dichten).

A3.i (4 Punkte.) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standartabweichung der Zufallsvariable $X = N(a, s)$ mit der Normalverteilung $X = N(a, s)$ gegeben durch die Dichte $\rho_{a,s}(X) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \mathsf{exp}(-\frac{(x-a)^2}{2s^2})$, $s > 0, a \in \mathbb{R}$.
(Hinweis: Bis auf konstanten Faktor ist das Integral $\mathbb{E}(X) = \int_{X \in \mathbb{R}} X \rho(X)\, dX$ gleich die Auswertung der Fourier-Transformirten $\widehat{X\rho(X)}$ in $y = 0$. Eine ähnliche Formel gilt für das Integral $\int_{X \in \mathbb{R}} X^2 \rho(X)\, dX$).

Bitte wenden

A3.ii (4 Punkte.) Es seien $X_1 = N(a_1, s_1)$ und $X_2 = N(a_2, s_2)$ zwei unabhängige Normalverteilungen. Berechnen Sie die Verteilungsdichte der Summe $X = X_1 + X_2$.
(Hinweis: Benutzen Sie die Formel für die Fourier-Transformirte der Faltung $\mathscr{F}(f * g)$ und für die inverse Fourier-Transformation).