Mathematik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 6

Abgabetermin: 1. Dezember in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (6 Punkte).

A1.i (2 Punkte). Berechnen Sie die Fourier-Transformation der Funktion $f(x) = e^{-|x|}$.

A1.ii (4 Punkte). Berechnen Sie das Integral $I(a,b,c) := \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx$ mit $a > 0, b, c$ reell. Unter der Annahme, dass die Formel für $I(a,b,c)$ auch für komplexe b und c gilt, berechnen Sie die Fourier-Transformation der Funktion $f(x) = e^{-ax^2+bx+c}$ mit $a > 0, b, c$ reell. (Hinweis. Benutzen Sie die Formel $\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.)

Aufgabe 2. (4 Punkte.).

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}(y)$ der charakteristischen Funktion $f(x) = \chi_I$ des Intervalls $I = [a, b]$ und zeigen Sie, dass $\hat{f}(y)$ Lebesgue-L^2-integrierbar aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 3. (6 Punkte+3 Zusatzpunkte).

Eine Messboje sendet ein Signal der Form $S_\omega(t) = e^{\mathrm{i}\omega t}$, das die Zeitperiode $t \in [0, 2T]$ dauert.

A3.i (3 Punkte). Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\widehat{S}_\omega(\tau)$ und zeigen Sie die Formel $\widehat{S}_{\omega+\alpha}(\tau) = \widehat{S}_\omega(\tau + \alpha)$.

A3.ii (3 Punkte). Finden Sie die Frequenz, auf welcher das Signal die maximale Amplitude erreicht. (Dies ist der Maximumpunkt der Funktion $|\widehat{S}_\omega(\tau)|^2$.) (Hinweis: Die Funktion $A(x) = \frac{2-2\cos(x)}{x^2} = \frac{4\sin^2(x/2)}{x^2}$ erreicht das absolute Maximum an der Stelle $x_0 = 0$.)

A3.iii (3 Zusatzunkte). Auf welcher Frequenz ist das Signal noch zu empfangen? (Finden Sie einen weiteren lokalen Maximumpunkt.)

(Hinweis: Die nächstgrößte lokale Maxima der Funktion $A(x) = \frac{2-2\cos(x)}{x^2} = \frac{4\sin^2(x/2)}{x^2}$ sind an der Stellen $x = x_{\pm 1} \approx \pm 9$ mit den Werten $A(x_1) = A(x_{-1}) \approx 0{,}02$.)