Übungsblatt 6

Hinweise zur Lösung von Aufgabe 2.

Aufgabe 2. (4 Punkte.).
Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}(y)$ der charakteristischen Funktion $f(x) = \chi_I$ des Intervalls $I = [a, b]$ und zeigen Sie, dass $\hat{f}(y)$ Lebesgue-L^2-integrierbar aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Für die Lösung dieser Aufgabe könnte man eine Abschätzung des Integrals $\int_{\mathbb{R}} |e^{\mathrm{i}ay} - e^{\mathrm{i}ay}| dy$ mit $a < b$ brauchen. Hier sind einige Hinweise
H1. $|e^{\mathrm{i}ay} - e^{\mathrm{i}by}| \geqslant |\Im(e^{\mathrm{i}ay} - e^{\mathrm{i}by})| = |\mathsf{sin}(ay) - \mathsf{sin}(by)| = 2|\mathsf{sin}\frac{(a-b)y}{2}\mathsf{cos}\frac{(a+b)y}{2}|$, wobei $\Im(z)$ bedeutet den Imaginäranteil von z.
H2. *Behauptung: Es existiert $c > 0$, so dass $\int_s^{s+1} |\mathsf{sin}\frac{(a-b)y}{2}\mathsf{cos}\frac{(a+b)y}{2}| dy \geqslant c$ für alle $y \in \mathbb{R}$.*
Beweis der Behauptung. Es sei s_k eine Folge so dass $\int_{s_k}^{s_k+1} |\mathsf{sin}\frac{(a-b)y}{2}\mathsf{cos}\frac{(a+b)y}{2}| dy$ zu dem Infimum $\mathsf{inf}\left(\int_s^{s+1} |\mathsf{sin}\frac{(a-b)y}{2}\mathsf{cos}\frac{(a+b)y}{2}| dy\ ,\ s \in \mathbb{R}\right)$. Falls s_k (oder eine Teilfolge von s_k) zu einem s_* konvergiert, dann ist $\int_{s_*}^{s_*+1} |\mathsf{sin}\frac{(a-b)y}{2}\mathsf{cos}\frac{(a+b)y}{2}| dy =: c > 0$ das absolute Minimum und damit die gewünschte Abschätzung.

Ist $a + b = 0$, so $\mathsf{cos}\frac{(a+b)y}{2} = 1$ und damit kann man die Rechnungen benutzen, die in der Übungsgruppen gemacht wurden.

Ansonsten ist keine Teilfolge von s_k beschränkt, und oBdA $s_k \to +\infty$. Wähle Folgen m_k, n_k von ganzen Zahlen, so dass $s_k - \frac{2\pi}{a-b}m_k$ und $\frac{\pi(a+b)}{a-b}m_k + \pi n_k$ beschränkt bleiben. Dann existiert eine Teilfolge so dass $s'_k := s_k - \frac{2\pi}{a-b}m_k$ konvergiert zu s_* und $\frac{\pi(a+b)}{a-b}m_k + \pi n_k$ konvergiert zu t. Dann mit der Benutzung von $\mathsf{sin}(y + k\pi) = (-1)^k \mathsf{sin}(y)$ und $\mathsf{cos}(y + k\pi) = (-1)^k \mathsf{cos}(y)$ bekommt man

$$\int_{s_k}^{s_k+1} \left|\mathsf{sin}\frac{(a-b)y}{2}\mathsf{cos}\frac{(a+b)y}{2}\right| dy = \int_{s'_k}^{s'_k+1} \left|\mathsf{sin}\frac{(a-b)y+2\pi m_k}{2}\mathsf{cos}\left(\frac{(a+b)y}{2} + \frac{\pi m_k(a+b)}{a-b}\right)\right| dy =$$

$$\int_{s'_k}^{s'_k+1} \left|\mathsf{sin}\frac{(a-b)y}{2}\mathsf{cos}\left(\frac{(a+b)y}{2} + \frac{\pi m_k(a+b)}{a-b} + \pi n_k\right)\right| dy \longrightarrow \int_{s_*}^{s_*+1} \left|\mathsf{sin}\frac{(a-b)y}{2}\mathsf{cos}\left(\frac{(a+b)y}{2} + t\right)\right| dy.$$

Das letzte Integral ist positiv und gibt die gewünschte Abschätzung.