Mathematik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 5

Abgabetermin: 24. November in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte).

Es seien μ das Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^n$ und ν ein Maß auf σ-Algebra $\mathscr{M}\!ess$ aller Lebesgue-messbarer Mengen. Zeigen Sie, dass ν absolut stetig bzgl. μ ist genau dann wenn für jede fallende Folge $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ von Lebesgue-messbaren Mengen mit $\mathsf{lim}_{i\to\infty}\mu(A_i) = 0$ gilt $\mathsf{lim}_{i\to\infty}\nu(A_i) = 0$.

Aufgabe 2. (8 Punkte + 2 Zusatzpunkte.).

A2.i (3 Punkte.) Es sei $X = \mathbb{Z}$ die Menge ganzer Zahlen, $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Telmengen von X, und μ ein diskretes Maß auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(\{x\}) \geqslant 1$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass für jede $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ und jede Funktion $f(x) \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ gilt:

$$\|f(x)\|_{L^q(X,\mu)} \leqslant \|f(x)\|_{L^p(X,\mu)}.$$

(Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall wenn $f(x)$ eine Treppenfunktion $f(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i\chi_{A_i}$ mit endlich vielen "Stufen" A_i und mit dem Norm $\|f(x)\|_{L^p(X,\mu)} = 1$ ist.)

A2.ii (3 Punkte.) Es sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(X) \leqslant 1$. Zeigen Sie, dass für jede $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ und jede Funktion $f(x) \in \mathscr{L}^q(X,\mu)$ gilt:

$$\|f(x)\|_{L^p(X,\mu)} \leqslant \|f(x)\|_{L^q(X,\mu)}.$$

(Hinweis: Hier auch betrachten Sie zuerst den gleichen speziellen Fall wie in **A2.i**.)

A2.iii (2 Punkte + 2 Zusatzpunkte.) (Ein Gegenbeispiel zu vorigen Teilaufgaben für p=1 < q=2 < r=3.) Finden Sie eine Funktion $f(x)$ auf $\mathbb{R}$ versehen mit dem Lebesgue-Maß, so dass $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ aber $f \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ und $f \notin \mathscr{L}^3(\mathbb{R})$. (Hinweis: Suchen Sie eine Treppenfunktion, die die geforderte Eigenschaften hat. Probieren Sie zuerst nur einen Teil der Bedingungen zu erfüllen: $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ und $f \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ oder $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ und $f \notin \mathscr{L}^3(\mathbb{R})$.)

Aufgabe 3. (4 Punkte).

Es sei S der Quader $\{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\}$ versehen mit der Dichtefunktion $\rho_S(\varphi,\theta) = \mathsf{cos}(\theta)$ und mit dem Maß μ_S der Dichte ρ_S bzgl. des Lebesgue-Maßes. Die Abbildung $\Phi_1 : S \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $x = \mathsf{cos}\varphi\,\mathsf{cos}\theta$, $y = \mathsf{sin}\varphi\,\mathsf{cos}\theta$, und $z = \mathsf{sin}\theta$ ist eine Parametrisierung der Einheitssphäre $S^2 := \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ mit dem Nordpol $N = (0,0,1)$. Die Abbildung $\Phi_2 : S^2\backslash\{N\} \to \mathbb{R}^2$ sei die Projektion von $S^2\backslash\{N\}$ aus dem Nordpol N auf die Oxy-Ebene $E = \{(x,y,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ (Siehe Skizze). Die Abbildung $\Psi : E \to S$ sei die Umkehrung der Komposition $\Phi_2 \circ \Phi_1$.

Berechnen Sie den Rücktransport $\Psi^*\mu_S$ des Maßes μ_S. (Hinweis: Berechnen Sie die Abbildung Ψ und den Rücktransport $\Psi^*\mu_S$ zuerst in Polarkoordinaten $x = r\mathsf{cos}\varphi, y = r\mathsf{sin}\varphi$ auf der Ebene.)

Bitte wenden

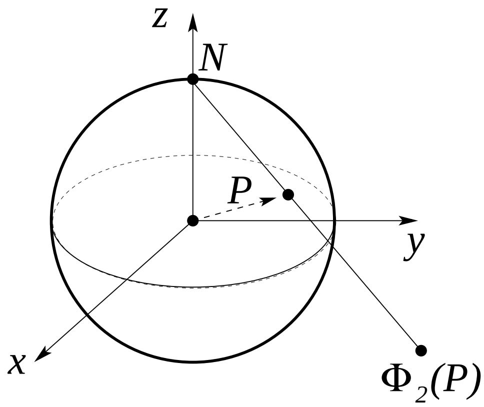

ABBILDUNG 1. Projektionsabbildung $\Phi_2 : S^2\backslash\{N\} \to \mathbb{R}^2$.