Mathematik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 4

Abgabetermin: 17. November in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte).
Die Gaußsche Dichte in $\mathbb{R}$ mit der Standardabweichung $\sigma > 0$ ist die Funktion $\rho_\sigma(x) := c_\sigma \cdot \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$ mit einer Konstante c_σ gegeben durch die Bedingung, dass das Gesamtmaß von $\mathbb{R}$ bezüglich der Dichte ρ_σ gleich 1 ist. Berechnen Sie die Konstante c_σ. (Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Fubini und betrachten Sie das Maß von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit Koordinaten x, y bezüglich der Produktdichte $\rho_\sigma(x)\times\rho_\sigma(y)$. Berechnen Sie dann das entstehende Doppelintegral in Polarkoordinaten.)

Aufgabe 2. (4 Punkte).
Es sei $0 < q \leqslant \frac{1}{3}$ eine Konstante. Ausgehend vom Einheitsintervall $C_0 := [0, 1]$ bildet man eine Folge von Mengen $C_n \subset \mathbb{R}$, die aus 2^n Intervallen C_{ni} der gleichen Länge, $i = 1 \dots 2^n$, wobei schneidet man aus der Mitte jedes Intervalls C_{ni} ein offenes Intervall der Länge q^{n+1}.

Berechnen Sie das Lebesguesche Maß der Mengen C_n und der entstehenden Cantorschen Menge $C := \cap_n C_n$. (Hinweis: Benutzen Sie die Kontinuitätseigenschaft des Lebesgueschen Maßes.)

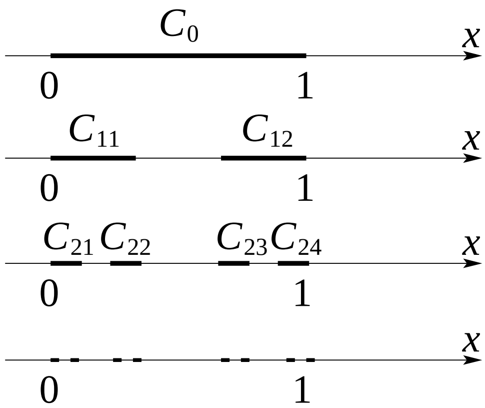

Abbildung 1. Konstruktion der Cantorschen Menge C.

Bitte wenden

Aufgabe 3. (6 Punkte).

Ein physikalisches System hat ein diskretes Energiespektrum $\mathbb{E} = \{E_n \ : \ n = 0, 1, 2, 3 \ldots\}$ mit einer Konstante E_0 und $E_n := 2E_0(n + \frac{1}{2})$. Nach dem Boltzmannschen Gesetz ist die Boltzmann-Statistik auf $\mathbb{E}$ zu der Temperatur T durch ein Maß μ_T gegeben, das die folgenden Eigenschaften hat:

(1) das Maß eines Punktes $E_n \in \mathbb{E}$ ist $\mu_T(\{E_n\}) = \frac{1}{Z}\mathsf{exp}\big(- \frac{E_n}{kT}\big)$, wobei $k > 0$ und $Z = Z(T) > 0$ Konstanten sind (Boltzmann-Konstante und Zustandssumme);

(2) das gesamte Maß $\mu_T(\mathbb{E})$ ist 1.

A3.i (2 Punkte) Berechnen Sie die Konstante Z.

A3.ii (2 Punkte) Es sei $\tilde{\mu}_T$ die triviale Fortsetzung von μ_T von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{R}$, so dass $\tilde{\mu}_T([a, b]) := \mu_T([a, b] \cap \mathbb{E})$ für jedes Intervall $[a, b]$. Berechnen Sie die Gesamtenergie des Systems $E := \int_{\mathbb{R}} x d\tilde{\mu}_T(x)$.

A3.iii (2 Punkte) Beschreiben Sie alle $\tilde{\mu}_T$-messbare Teilmengen $M \subset \mathbb{R}$ und alle $\tilde{\mu}_T$-Nullmengen.