Mathematik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 3

Abgabetermin: 10. November in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (2+2+2+2=8 Punkte).

A1.i Zeigen Sie die Gleichheiten $\chi_{A\cup B}(x) = \mathsf{max}(\chi_A(x), \chi_B(x))$ und $\chi_{A\cap B}(x) = \mathsf{min}(\chi_A(x), \chi_B(x))$ für beliebige Teilmengen A, B einer beliebigen Menge X.

A1.ii Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Treppenfunktionen in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es eine Treppenfunktion $\theta(x)$ existiert, so dass $\varphi(x)\cdot\psi(x) = \theta(x)$ fast überall in $\mathbb{R}^n$.

A1.iii Konstruieren Sie ein Beispiel zweier Treppenfunktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, so dass die Funktion $\mathsf{max}(\varphi(x), \psi(x))$ keine Treppenfunktion ist.

A1.iv Es seien $f(x), g(x)$ reellwertige Funktionen, $\varphi(x)$ eine Majorante von $f(x)$, und $\psi(x)$ eine Majorante von $g(x)$. Zeigen Sie, dass $\theta^*(x) := \mathsf{max}(\varphi(x), \psi(x))$ ist eine Majorante von beide $\mathsf{max}(f(x), g(x))$ und $\mathsf{min}(f(x), g(x))$.

Aufgabe 2. (2+2+4=8 Punkte + 2 Zusatzpunkte). Es sei $\mathcal{T}_n$ der Raum aller beschränkter komplexwertiger Treppenfunktionen $\varphi(x) = \sum_i c_i\chi_{Q_i}$ in $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Norm $\|\sum_i c_i\chi_{Q_i}\|_{L^\infty} := \mathsf{sup}(\,|c_i|\,)$.

A2.i (2 Punkte.) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{L^\infty} : \mathcal{T}_n \to \mathbb{R}$ tatsächlich eine Norm ist.

A2.ii (2 Punkte.) Zeigen Sie, dass für jede Lebesgue-integrierbare komplexwertige Funktion $f(x)$ und jede $\varphi(x) \in \mathcal{T}_n$ gilt: $\varphi(x) \cdot f(x)$ ist auch Lebesgue-integrierbar und

$$\left|\int \varphi(x)\cdot f(x)\, d^n x\right| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^1}.$$

A2.iii (4 Punkte.) Zeigen Sie, dass für jede Lebesgue-integrierbare komplexwertige Funktion $f(x)$ gilt:

$$\|f\|_{L^1} = \mathsf{sup}\left\{ \left| \int \varphi(x)\cdot f(x)\, d^n x\right| \ :\ \varphi(x) \in \mathcal{T}_n,\ \|\varphi\|_{L^\infty} \leqslant 1 \right\}.$$

A2.iv (2 Zusatzpunkte.) Es sei $P \in \mathbb{R}^1$ ein Punkt und $\delta_P^+, \delta_P^- : \mathcal{T}_1 \to \mathbb{C}$ zwei Abbildungen definiert durch $\delta_P^+(\varphi) := \lim\limits_{x\to P+} \varphi(x)$ und $\delta_P^-(\varphi) := \lim\limits_{x\to P-} \varphi(x)$ (d.h., δ_P^+, δ_P^- sind der rechter und linker Wert von $\varphi(x)$ in P). Zeigen Sie die Ungleichungen

$$|\delta_P^\pm(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{T}_1.$$