Mathematematik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 2

Abgabetermin: 3. November in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4+4 Punkte).

A1.i (4 Punkte). Es sei $f_1(x)$ eine Funktion auf dem Intervall $I = [0, 1]$ definiert durch

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für rationale } x = p/q, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f_1(x)$ *nicht* Riemannsch-integrierbar aber Lebesgue-integrierbar ist.

A1.ii (4 Punkte). Es sei $f_2(x)$ eine Funktion auf dem Intervall $I = [0, 1]$ definiert durch

$$f_2(x) = \begin{cases} 1/q & \text{für rationale } x = p/q, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f_2(x)$ Riemannsch-integrierbar und damit Lebesgue-integrierbar ist.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass $\forall \varepsilon > 0$ nur endlich viele Punkte $x \in I$ mit $|f_2(x)| > \varepsilon$ existieren.)

Aufgabe 2. (4 Punkte). Berechnen Sie das Volumen des Kugelsegmentes S von Radius R und Höhe h (siehe Abbildung 1) gegeben durch

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, z \geqslant R - h\},$$

und zwar in folgenden zwei Weisen:

- Als das doppelte Integral $\int_{x=-r}^{r} \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$ mit $r := \sqrt{R^2 - h^2}$ Radius der Grundfläche des Kugelsegmentes;
- Dasselbe Integral in Polarkoordinaten mit $\rho := \sqrt{x^2 - y^2}$, $\varphi := \mathsf{arctan} \frac{y}{x}$ und $x = \rho\, \mathsf{cos}\varphi$, $y = \rho\, \mathsf{sin}\varphi$.

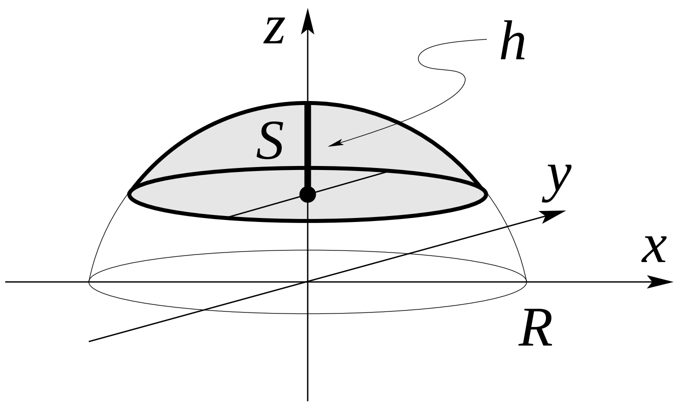

Abbildung 1. Kugelsegment von Radius R und Höhe h.

Aufgabe 3. (4 Punkte). Eine Halbkugel H von Radius $R = 1$ und Dichte $0 < \sigma < 1$ schwimmt "waagerecht" im Wasser (Dichte $\sigma_{\mathsf{H_2O}} = 1$), siehe Abbildung 2. Bei welcher Dichte σ ist der Schwerpunkt der Halbkugel H *unter* der Wasseroberfläche.

(Hinweis: Sie müssen zwei Größen vergleichen. Die erste ist die Tiefe h mit welcher die Halbkugel H im Wasser sitzt. Diese bekommen Sie aus der Formel $\mathsf{Vol}(S) = \sigma \cdot \mathsf{Vol}(H)$ nach dem Archimedischen Prinzip, wobei S das Unterwasser-Kugelsegment ist. Benutzen Sie das Ergebnis der Aufgabe 2.

Die zweite Größe ist die Tiefe des Halbkugelschwerpunktes. Dies wird als das Quotient

$$a = \frac{\iiint_H z\,dx\,dy\,dz}{\iiint_H 1\,dx\,dy\,dz}$$

berechnet, wobei H als das Gebiet $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \geqslant 0\}$ definiert ist.)

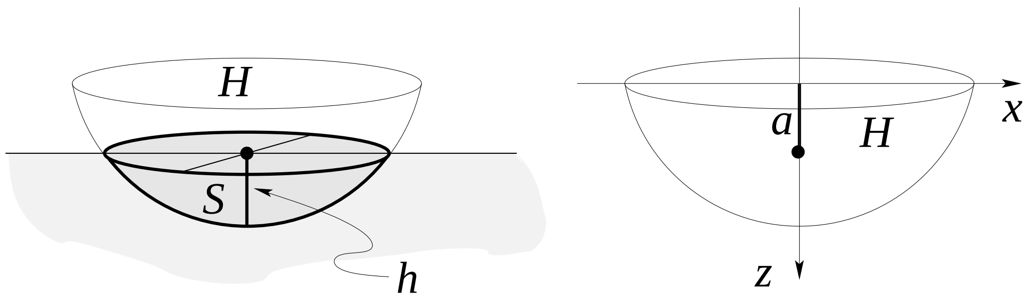

Abbildung 2. Links: Halbkugel H schwimmt im Wasser, wobei das Kugelsegment S befindet sich unter der Wasseroberfläche.
Rechts: Tiefe a des Halbkugelschwerpunktes.