Mathematematik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 11

Abgabetermin: 19. Januar in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte.)
Berechnen Sie das Volumenelement und das Volumen der 3-dimensionalen Sphäre $S^3 := \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + \dots + x_4^2 = 1\}$.
(Hinweis: Als verallgemeinerte Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^4$ können Sie entweder das Koordinatensystem aus der Aufgabe 1 vom Blatt 9 benutzen, oder die Standart-Kugelkoordinaten $x_1 = r\mathsf{sin}\varphi_1\mathsf{sin}\varphi_2\mathsf{sin}\varphi_3$, $x_2 = r\mathsf{cos}\varphi_1\mathsf{sin}\varphi_2\mathsf{sin}\varphi_3$, $x_3 = r\mathsf{cos}\varphi_2\mathsf{sin}\varphi_3$, $x_4 = r\mathsf{cos}\varphi_3$, siehe Seite 62 des Skriptes.)

Aufgabe 2. (4 Punkte.)
Berechnen Sie die Oberfläche des Torus T^2 in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Parametrisierung $x = (3 + \mathsf{cos}\theta)\mathsf{cos}\varphi$, $y = (3 + \mathsf{cos}\theta)\mathsf{sin}\varphi$, $z = \mathsf{sin}\theta$ mit $\varphi, \theta \in [0, 2\pi]$.

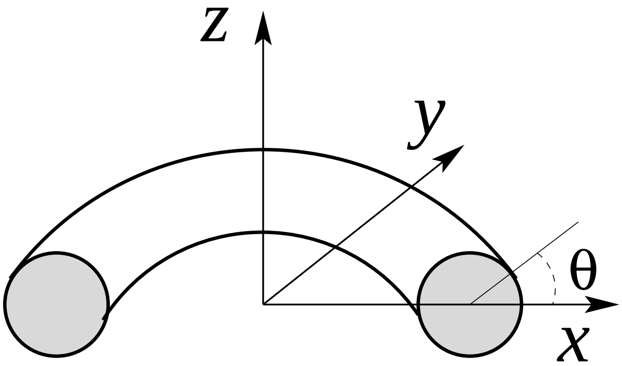

Abbildung 1. Der Torus von Schlauchradius 1 und Seelenradius 3.
(Seele ist die Kreislinie in der Mitte von Torus).
Auf dem Bild ist nur die Hälfte des Torus zu sehen.

Aufgabe 3. (4 Punkte.)
Auf die Einheitssphäre ist eine Farbenschicht aufgetragen, deren Dichte ρ in der Parametrisierung in der Kugelkoordinaten $x = \mathsf{cos}\varphi\,\mathsf{sin}\theta$, $y = \mathsf{sin}\varphi\,\mathsf{sin}\theta$, $z = \mathsf{cos}\theta$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\theta \in [0, \pi]$ durch die Funktion $\rho(\varphi, \theta) = \mathsf{sin}\theta$ gegeben ist. Welche Menge von Farbe wurde benutzt?

Aufgabe 4. (4 Punkte.)
Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}(x, y, z) = (x - 1, z, y)$ durch die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.