Mathematik für Physiker III

Veranstalter: Dr. Vsevolod Shevchishin

Übungsblatt 1

Abgabetermin: 27. Oktober in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte). Berechnen Sie die Fläche der Ellipse gegeben durch die Ungleichung $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$ (siehe Abbildung 1).

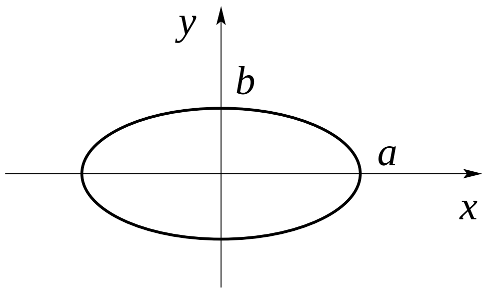

Abbildung 1. Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$.

Aufgabe 2. (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

$$\int x \cdot \sin(x) \cdot e^x dx; \quad \int \frac{(\log\log x)^2}{x \log x} dx.$$

Aufgabe 3. (4 Punkte). Beweisen Sie die Formel $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$. (Hinweis: $y = \arctan(x)$ ist die inverse Funktion zu $x = \tan(y)$.)

Aufgabe 4. (4 Punkte). Ein Federpendel ist ein mechanisches System bestehend aus einem Feder mit der Federkonstante k und aus einem daran befestigten Massestück der Masse m, das schwingt unter dem Einfluss der Federkraft (siehe Abbildung 2 auf Seite 2). Es sei $x(t)$ die Position des Massestücks (= Abweichung vom Ruhezustand) und $\dot{x}(t)$ die Zeitableitung. Nach dem Energieerhaltungsgesetz bleibt bei der Schwingung die Gesamtenergie $\frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}$ konstant. Finden Sie die explizite Formel für die Funktion $x(t)$ und bestimmen Sie die Periode T der Schwingung.

(Hinweis: Schreiben Sie die Abhängigkeit zwischen der Position und der Zeit in der Form $t = f(x)$, leiten Sie aus der Formel $\frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = E$ die Formel für die Ableitung $f'(x) := \frac{df}{dx}$, und integrieren Sie sie. Tip: Nach der Kettenregel gilt: $f' \cdot \dot{x} = 1$.)

Bitte wenden.

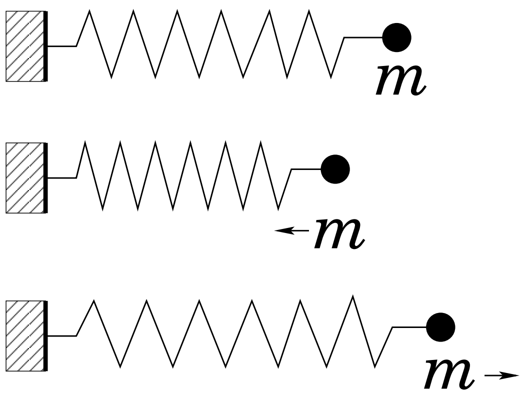

ABBILDUNG 2. Schwingung des Federpendels.