Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 13 (Bonusblatt)

Abgabe am 7. Juli 2015 am Anfang der Vorlesung.

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt sind freiwillig und werden als Bonuspunkte gezählt. Nichtdestotrotz ist es empfehlenswert sich mit allen Aufgaben auseinanderzusetzen.

Aufgabe 1 (Ultraprodukt bzgl. Hauptfilters; 4 Punkte)

Seien S eine Symbolmenge, I eine nicht-leere Menge, U ein Hauptfilter auf I und $\mathfrak{A}_i$ eine S-Struktur für $i \in I$. Zeigen Sie, dass es ein $j \in I$ gibt, so dass $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U \cong \mathfrak{A}_j$.

Lösung:

Da U ein Hauptfilter ist, ist U von der Form $U = \{X \subseteq I \mid i_0 \in X\}$ für ein $i_0 \in I$. Wir zeigen, dass $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U \cong \mathfrak{A}_{i_0}$. Dafür definiere die Abbildung

$$h : \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U \to \mathfrak{A}_{i_0}$$

durch

$$h([f]_U) := f(i_0).$$

Wir überlegen uns, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Es gilt nämlich

$$[f]_U = [f']_U \iff \{i \in I \mid f(i) = f'(i)\} \in U \iff f(i_0) = f'(i_0).$$

Die Funktion h ist also von der Wahl des Represäntanten unabhängig und injektiv. Diese Abbildung ist auch surjektiv, denn für jedes $a \in A_{i_0}$ sei $f \in \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ mit $f(i_0) := a \in A_{i_0}$ und $f(i)$ beliebig für $i \neq i_0$. Dann ist $h([f]_U) = f(i_0) = a$.

Wir rechnen nun nach, dass h strukturehaltend ist, d.h. ein Isomorphismus. Sei $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U$ mit $\mathfrak{A}$ abgekürzt.

Für ein Konstantensymbol $c \in S$ gilt

$$c^{\mathfrak{A}} = \left[\left(c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I\right)\right]_U$$

und somit

$$h\left(c^{\mathfrak{A}}\right) = c^{\mathfrak{A}_{i_0}}.$$

Für ein Funktionssymbol $g \in S$ gilt

$$g^{\mathfrak{A}}([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U) = \left[\left(g^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \mid i \in I\right)\right]_U$$

und somit

$$\begin{aligned} h\left(g^{\mathfrak{A}}([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U)\right) &= g^{\mathfrak{A}_{i_0}}(f_1(i_0), \ldots, f_n(i_0)) \\ &= g^{\mathfrak{A}_{i_0}}(h([f_1]_U), \ldots, h([f_n]_U)). \end{aligned}$$

Für ein Relationssymbol $R \in S$ gilt

$$\begin{aligned} R^{\mathfrak{A}}([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U) &\iff \left\{i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i))\right\} \in U \\ &\iff R^{\mathfrak{A}_{i_0}}(f_1(i_0), \ldots, f_n(i_0)) \\ &\iff R^{\mathfrak{A}_{i_0}}(h([f_1]_U), \ldots, h([f_n]_U)). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Produkte von Körpern; 6 Punkte)

Sei I eine nicht-leere Indexmenge und für $i \in I$ sei $\mathfrak{F}_i$ ein Körper. Bilden wir das direkte Produkt $\mathfrak{R} = \prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, so wissen wir, dass $\mathfrak{R}$ ein Ring ist. Ist U ein Ultrafilter auf I, so sei

$$M_U := \{r \in R \mid \{i \in I \mid r(i) = 0\} \in U\},$$

wobei R die Grundmenge der Struktur $\mathfrak{R}$ ist.

Wir nennen eine nicht-leere Teilmenge $M \subseteq R$ ein *Ideal*, falls für alle $a, b \in M$ gilt $a - b \in M$ und für alle $a \in M, r \in R$ gilt $r \cdot a \in M$. Ein Ideal $M \subseteq R$ heißt *maximal*, falls kein Ideal $N \subseteq R$ existiert mit $M \subsetneq N \subsetneq R$.

Zeigen Sie:

1. Für jeden Ultrafilter U, ist M_U ein maximales Ideal im Ring $\mathfrak{R}$.
2. Für jedes maximale Ideal M im Ring $\mathfrak{R}$ existiert ein Ultrafilter U auf I mit $M = M_U$.
3. Das Ultraprodukt $\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i/U$ ist isomorph zum Quotientenring $\mathfrak{R}/M_U$. Da M_U ein maximales Ideal in $\mathfrak{R}$ ist, so folgern wir, dass $\mathfrak{R}/M_U$ und damit auch $\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i/U$ ein Körper ist.

Lösung:

1. Sei U ein Ultrafilter auf I. Wir prüfen die Eigenschaften aus der Definition eines Ideals im Ring $\mathfrak{R}$ für M_U nach.

   Es ist $0 \in R$ und somit ist die konstante Nullfunktion Element von I. Also $I \neq \varnothing$. Seien $a, b \in M_U, r \in R$. Wegen $a, b \in M_U$ ist

   $$\{i \in I \mid a(i) = 0\} \in U,$$
   $$\{i \in I \mid b(i) = 0\} \in U.$$

   Es folgt

   $$\{i \in I \mid a(i) = 0\} \cap \{i \in I \mid b(i) = 0\} \subseteq \{i \in I \mid (a - b)(i) = 0\} \in U,$$

   da U ein Filter ist, und somit $a - b \in M_U$. Weiter ist für $r \in R$

   $$\{i \in I \mid a(i) = 0\} \subseteq \{i \in I \mid (ra)(i) = 0\} \in U$$

   und somit $ra \in M_U$. Also ist M_U ein Ideal.

   Wir zeigen, dass M_U ein maximales Ideal in $\mathfrak{R}$ ist. Angenommen nicht. So sei J ein Ideal in R mit $M_U \subsetneq N \subsetneq R$. Wegen $M_U \subsetneq N$ sei $a \in N \backslash M_U$. Aus $a \notin M_U$ folgt

   $$\{i \in I \mid a(i) = 0\} \notin U.$$

   Da U ein Ultrafilter ist, so folgt

   $$I_0 := \{i \in I \mid a(i) \neq 0\} = I \backslash \{i \in I \mid a(i) = 0\} \in U.$$

   Ist nun $q \in R$, so lässt sich q darstellen als $q = b + r \cdot a$ mit $b, r \in R$, $b(i) = 0$ für alle $i \in I_0$. Nun folgt aus Idealeigenschaften, aus $b \in M_U \subseteq N$ und $a \in N$ sofort $q \in N$. Wir haben also gerade gezeigt, dass $N = R$ in Widerspruch zu $N \subsetneq R$.

2. Sei M ein maximales Ideal in R. Definiere

$$U := \{\{i \in I \mid r(i) = 0\} \ \mid r \in M\}.$$

Wir rechnen nach, dass es ein Ultrafilter ist. Es ist $\varnothing \notin U$, denn sonst würde ein $r \in M$ mit $r(i) \neq 0$ für alle $i \in I$ existieren. Das kann aber nicht sein wegen $M \subsetneq R$.

Ist $r \in M$ und $\{i \in I \mid r(i) = 0\} \subseteq X \subseteq I$, so ist $X = \{i \in I \mid \ (r \cdot q)(i) = 0\} \in U$ mit $q \in R$, definiert durch $q(i) = 0$, falls $i \in X \backslash \{i \in I \mid r(i) = 0\}$ und $q(i) = 1$ sonst.

Sind $r_1, r_2 \in M$ mit $\{i \in I \mid r_1(i) = 0\}, \{i \in I \mid r_2(i) = 0\} \in U$, so folgt

$$\{i \in I \mid r_1(i) = 0\} \cap \{i \in I \mid r_2(i) = 0\} = \{i \in I \mid \ (q_1 \cdot r_1 + q_2 \cdot r_2)(i) = 0\} \in U$$

mit $q_1, q_2 \in R$,

$$q_1(i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r_1(i) = r_2(i) = 0 \\ 0 & \text{falls } r_1(i) = 0 \text{ und } r_2(i) \neq 0 \\ (r_1(i))^{-1} & \text{falls } r_1(i) \neq 0 \text{ und } r_2(i) = 0 \\ 0 & \text{falls } r_1(i) \neq 0 \text{ und } r_2(i) \neq 0 \end{cases},$$

$$q_2(i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r_1(i) = r_2(i) = 0 \\ (r_2(i))^{-1} & \text{falls } r_1(i) = 0 \text{ und } r_2(i) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } r_1(i) \neq 0 \text{ und } r_2(i) = 0 \\ (r_2(i))^{-1} & \text{falls } r_1(i) \neq 0 \text{ und } r_2(i) \neq 0 \end{cases}.$$

Also ist U ein Filter.

Sei $X \subseteq I$. Wir zeigen, dass $X \in U$ oder $I \backslash X \in U$. Betrachte dazu die Elemente $r_1, r_2 \in R$ definiert durch
$r_1(i) = 0$ für $i \in X$ und $r_1(i) = 1$ für $i \in I \backslash X$;
$r_2(i) = 1$ für $i \in X$ und $r_2(i) = 0$ für $i \in I \backslash X$.
So ist $r_1 + r_2 = 1$ die konstante Einsfunktion. Da N ein Ideal und $M \neq R$ ist, kann 1 kein Element von J sein (sonst würde $M = R$ folgen, denn $r \cdot 1 = r \in M$ für $r \in R$). Also können auch nicht beide r_1, r_2 in M sein. Da M maximal ist, muss aber entweder r_1 oder r_2 in M sein. Daraus folgt dass $X \in U$ oder $I \backslash X \in U$.

3. Sei U ein Ultrafilter. Wir betrachten die Abbildung

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i / U \to \mathfrak{R} / M_U$$

definiert durch

$$[r]_U \mapsto [r]_{M_U}$$

wobei $[r_1]_{M_U} = [r_2]_{M_U}$, falls $r_1 - r_2 \in M_U$. Da die Operationen in beiden Strukturen identisch gegeben sind, müssen wir nur feststellen, dass die Äquivalenzrelationen gleich sind. Es gilt aber

$$[r_1]_U = [r_2]_U$$

$$\begin{aligned} &\iff \{i \in I \mid r_1(i) = r_2(i)\} \in U, \\ &\iff \{i \in I \mid r_1(i) - r_2(i) = 0\} \in U, \\ &\iff [r_1]_{M_U} = [r_2]_{M_U}. \end{aligned}$$

Somit ist die gegebene Abbildung ein Isomorphismus.

Aufgabe 3 (Ultraprodukt der Körper mit Char $\mathfrak{K}_i = p_i$**; 4 Punkte)**

Sei $S = \{+, \cdot, 0, 1\}$ die Symbolmenge der Körper. Angenommen für $i \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{F}_i$ ein Körper der Primzahlcharakteristik p_i, wobei p_i die i-te Primzahl sei, und U ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, welcher kein Hauptfilter ist. Bestimmen Sie die Charakteristik des Körpers $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_i / U$.

Lösung:
Sei $\mathfrak{F}_i$ ein Körper der Charakteristik p_i für die i-te Primzahl ist. Wir betrachten den S-Satz

$$\phi_n := \bigwedge_{k<n} t_k \neq 0,$$

wobei t_k sei die Abkürzung für den Term $\underbrace{1+1+\ldots 1}_{k\text{-mal}}$. Es gilt für jeden Körper $\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F} \models \phi_n \iff \text{Char } (\mathfrak{F}) \geqslant n.$$

Insbesondere gilt

$$\mathfrak{F}_i \models \phi_n \text{ für } n < p_i.$$

Nach den Satz von Łoś gilt nun

$$\begin{aligned} \text{Char}\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_i / U\right) \geqslant n \quad &\iff \quad \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_i / U \models \phi_n, \\ &\overset{\text{Łoś}}{\iff} \quad \{i \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{F}_i \models \phi_n\} \in U, \\ &\iff \quad \{i \in \mathbb{N} \mid \text{Char } \mathfrak{F}_i \geqslant n\} \in U. \end{aligned}$$

Da U ein Ultrafilter, welcher kein Hauptfilter ist. So ist jede koendliche Menge in U (d.h. jede Menge deren Komplement endlich ist). Die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid \text{Char } \mathfrak{F}_i \geqslant n\}$ ist koendlich, denn für $p_i \geqslant n$ für i groß genung. Somit ist die Charakteristik des Körpers $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_i / U$ nicht endlich und muss gleich 0 sein.

Aufgabe 4 (Ultrapotenz von $\mathbb{R}$; 4 Punkte)

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ der angeordnete Körper der reellen Zahlen, U ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, welcher kein Hauptfilter ist. Wir betrachten die Ultrapotenz $\mathfrak{A} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{R} / U$ von $\mathfrak{R}$

1. Zeigen Sie, dass der Körper $\mathfrak{A}$ nicht-archimedisch ist, indem Sie eine Funktion $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ angeben, so dass $u \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{R}$ und $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{-mal}} <^{\mathfrak{A}} [u]_U$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Geben Sie explizit die Funktionen $u_+ : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $u_\times : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so dass $[u_+]_U = [u]_U +^{\mathfrak{A}} [u]_U$ und $[u_\times]_U = [u]_U \cdot^{\mathfrak{A}} [u]_U$.

Lösung:

1. Sei $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $u(n) = n$ die identische Funktion. Es gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{-mal}} <^{\mathfrak{A}} [u]_U \quad &\iff \quad \left\{ i \in \mathbb{N} \mid \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{-mal}} <^{\mathfrak{A}_i} u(i) \right\} \in U \quad (\text{mit } \mathfrak{A}_i = \mathfrak{R}), \\ &\iff \quad \left\{ i \in \mathbb{N} \mid \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{-mal}} <^{\mathfrak{R}} i \right\} \in U, \\ &\iff \quad \{ i \in \mathbb{N} \mid n < i \} \in U. \end{aligned}$$

Da U ein Ultrafilter, welcher kein Hauptfilter ist, so enthält U alle koendliche Mengen (d.h. Mengen deren Komplement endlich ist), insbesondere ist $\{i \in \mathbb{N} \mid n < i\} \in U$ wahr.

2. Man rechnet im Ultraprodukt:

$$\begin{aligned}
[u]_U +^{\mathfrak{A}} [u]_U &= \left[\left(u(i) +^{\mathfrak{R}} u(i) \ \mid i \in \mathbb{N}\right)\right]_U , \\
&= \left[\left(i +^{\mathfrak{R}} i \mid i \in \mathbb{N}\right)\right]_U , \\
&= \left[(2i \mid i \in \mathbb{N})\right]_U ,
\end{aligned}$$

also die Funktion $u_+ : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u_+(n) = 2n$ erfüllt

$$[u_+]_U = [u]_U +^{\mathfrak{A}} [u]_U .$$

Analog rechnet man nach, dass die Funktion $u_\times : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $u_\times(n) = n^2$ erfüllt

$$[u_\times]_U = [u]_U \cdot^{\mathfrak{A}} [u]_U .$$