Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 10

Abgabe am 16. Juni 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Δ-Elementarität der unendlichen Strukturen; 3 Punkte)

Sei $\mathfrak{K}$ eine Δ-elementare Klasse von Strukturen. Man zeige, dass die Klasse $\mathfrak{K}^\infty$ der Strukturen in $\mathfrak{K}$ mit unendlichem Träger auch Δ-elementar ist.

Aufgabe 2 (Komplementklasse; 6 Punkte)

Es seien $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ Klassen von S-Strukturen mit $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}$. Weiter sei $\mathfrak{K}_2$ die Klasse der S-Strukturen, die zu $\mathfrak{K}$, aber nicht zu $\mathfrak{K}_1$ gehören: $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K} \backslash \mathfrak{K}_1$. Weiterhin seien $\mathfrak{K}$ elementar und $\mathfrak{K}_1$ sei Δ-elementar. Man zeige, daß die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

1. $\mathfrak{K}_1$ ist elementar.
2. $\mathfrak{K}_2$ ist Δ-elementar.
3. $\mathfrak{K}_2$ ist elementar.

Aufgabe 3 (Unabhängigkeit von Axiomensystemen; 2 Punkte)

Eine Menge Φ von S-Sätzen heißt *unabhängig*, wenn kein $\phi \in \Phi$ aus $\Phi \backslash \{\phi\}$ (semantisch) folgt. Man zeige, daß jede endliche Menge Φ von S-Sätzen eine unabhängige Teilmenge Φ_0 hat, so daß $\mathrm{Mod}^S \Phi = \mathrm{Mod}^S \Phi_0$.

Aufgabe 4 (Universelle Axiomatisierung; 3 Punkte)

Sei S eine Symbolmenge. Falls $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S \Phi$, so nennen wir Φ ein *Axiomensystem für* $\mathfrak{K}$. Wir sagen, $\mathfrak{K}$ sei *universell axiomatisierbar*, falls ein Axiomensystem existiert, welches aus universellen Sätzen besteht. Wir nennen eine Klasse $\mathfrak{K}$ *abgeschlossen unter Unterstrukturen*, falls gilt:

wenn $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ und wenn $\mathcal{B}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{A}$ ist, dann ist $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$.

Zeigen Sie: Jede universell axiomatisierbare Klasse ist abgeschlossen unter Unterstrukturen.

Aufgabe 5 (Körper mit Primzahlcharakteristik; 2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Klasse der Körper mit Primzahlcharakteristik nicht Δ-elementar ist.