Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 9

Abgabe am 9. Juni 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Kompaktheit im Raum der Modelle; 4 Punkte)

Wir erinnern uns an die Begriffe aus Topologie.

Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, τ), bestehend aus einer Menge X und $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&\varnothing, X \in \tau \\
&U \subseteq \tau \implies \bigcup U \in \tau \\
&U \subseteq \tau \text{ endlich } \implies \bigcap U \in \tau
\end{aligned}$$

Eine Basis einer Topologie ist eine Familie $\mathcal{B} \subseteq \tau$, so dass jedes $U \in \tau$, sich darstellen lässt als $\bigcup \mathcal{B}'$ für ein $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Eine Mengenfamilie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definiert Basis einer Topologie, wenn sie die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:

$$\forall x \in X \; \exists B \in \mathcal{B} \; x \in B,$$

$$\forall B_1, B_1 \in \mathcal{B} \; \forall x \in B_1 \cap B_2 \; \exists B \in \mathcal{B} \; x \in B \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Eine offene Überdeckung von X ist eine Familie $U \subseteq \tau$ mit $X = \bigcup U$.

Sei S eine Symbolmenge. Zu jeder erfüllbaren Menge Φ von S-Sätzen sei $\mathfrak{A}_\Phi$ eine S-Struktur mit $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Ferner sei $\Sigma := \left\{ \mathfrak{A}_\Phi \mid \Phi \subseteq L_0^S, \text{Erf } \Phi \right\}$. Für jeden S-Satz ϕ setze man $X_\phi := \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \phi\}$.

1. Man zeige, dass das System $\left\{ X_\phi \mid \phi \in L_0^S \right\}$ die Basis einer Topologie auf Σ bildet. Wir bezeichnen diese Topologie mit τ.
2. Man zeige, dass jede Menge X_ϕ abgeschlossen bzgl. τ ist.
3. Man zeige mit dem Endlichkeitssatz, dass jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält. Diese Eigenschaft des topologischen Raumes Σ wird auch als Kompaktheit bezeichnet.

Aufgabe 2 (Eine Anwendung des Zorn'schen Lemmas; 4 Punkte)

Sei X eine Menge und $\leqslant_0$ und $\leqslant_1$ binäre Relationen auf X. Wir sagen, dass $\leqslant_1$ eine *Erweiterung* von $\leqslant_0$ ist, falls gilt: für alle $x, y \in X$, falls $x \leqslant_0 y$, so auch $x \leqslant_1 y$. (Wenn man die binären Relationen mengentheoretisch auffasst, ist dies äquivalent zu $\leqslant_0 \subseteq \leqslant_1$.)

Verwenden Sie das Zorn'sche Lemma um die folgende Aussage zu zeigen: Jede partielle Ordnung auf X hat eine Erweiterung, die eine lineare Ordnung ist.

Aufgabe 3 ((Kardinal-)kategorizität; 4 Punkte)

Wir erinnern uns daran, dass eine Menge T von Sätzen *kategorisch* heißt, falls je zwei Modelle von T isomorph sind. Wir nennen eine Menge T von Sätzen *kardinalkategorisch*, falls je zwei Modelle von T der gleichen Kardinalität isomorph sind.

1. Zeigen Sie: Falls T ein unendliches Modell hat, dann ist T nicht kategorisch.

2. Zeigen Sie, dass es eine widerspruchsfreie kardinalkategorische Menge von Sätzen gibt, die unendliche Modelle hat. Diese Menge ist somit nach (1) nicht kategorisch.